



创建建筑物的 3D 虚拟模型

你将进行一项创建建筑物的 3D 虚拟模型的任务。我们可以先思考一下：该如何准确测量并确定建筑物的高度呢？在现实世界中，建筑师、工程师和城市规划师依靠数学概念来估算建筑物的尺寸，这对开发和施工项目至关重要。

想像一下，你站在建筑物外，配备简单的工具和数学知识，准备估算其高度，然后创建其 3D 模型。这样的任务不仅会让你更深入理解所涉及的数学概念，还能让你亲身体会这些概念在现实世界中的实际应用。

最重要的是，你将学会在创建模型过程中作出简化的假设和认清局限性，这只是由于缺乏专业的工具或精确的测量。我们未来将能够创建更准确的模型！

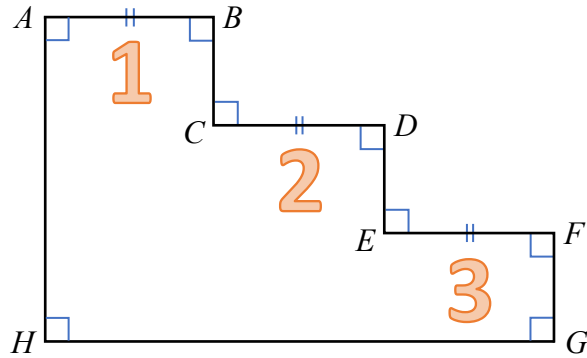
创建建筑物的 3D 虚拟模型

工作纸 1

活动 1

讨论一个估算高度的数学模型。

1. 下图展示一个颁奖台 $ABCDEFGH$ 。



(a) 若 $AB = CD = EF = 60 \text{ cm}$ ，求颁奖台的长度 HG 。

(b) 已知 $BC = 32 \text{ cm}$ 。一位学生估算高度 AH 如下。

$$AH = 32 \text{ cm} \times 3 = 96 \text{ cm}$$

他作了什么主要的假设？这个假设合理吗？

2. 一位学生住在一座 17 层楼高的建筑物中，并希望估算其高度。他提出了以下的方法。

- 步骤 1：量度楼梯一个梯级的高度 (h)。
- 步骤 2：数算建筑物某一层的梯级数目 (n)。
- 步骤 3：数算建筑物的层数 (k)。
- 步骤 4：制定模型：

$$\text{建筑物高度} = h \cdot n \cdot k$$

在第 12 层，一段楼梯有 16 个梯级。他测量了第 7 个梯级，发现它的上升高度为 15.2 cm。

运用他的模型来估算建筑的高度，以 m 为单位。

3. 问题 2 中的模型有什么假设和局限性？

4. 使用这种建模方法有什么可能的环境限制？

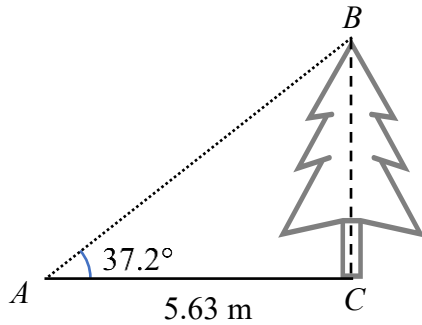
创建建筑物的 3D 虚拟模型

工作纸 2

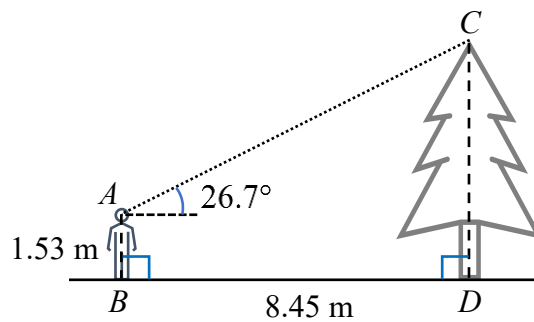
活动 2A

运用三角比估算高度。

1. 在图中，树 BC 投下一个 5.63 m 长的影子 (AC) 且 $\angle A = 37^\circ$ 。假设 $BC \perp AC$ 。
求树 BC 的高度。



2. 在图中，一位学生站在点 B ，距离树 CD 有 8.45 m 。已知他的视线水平高于地面 1.53 m 。他发现从他的眼睛 A 到树顶部的仰角是 26.7° 。
求树 CD 的高度。

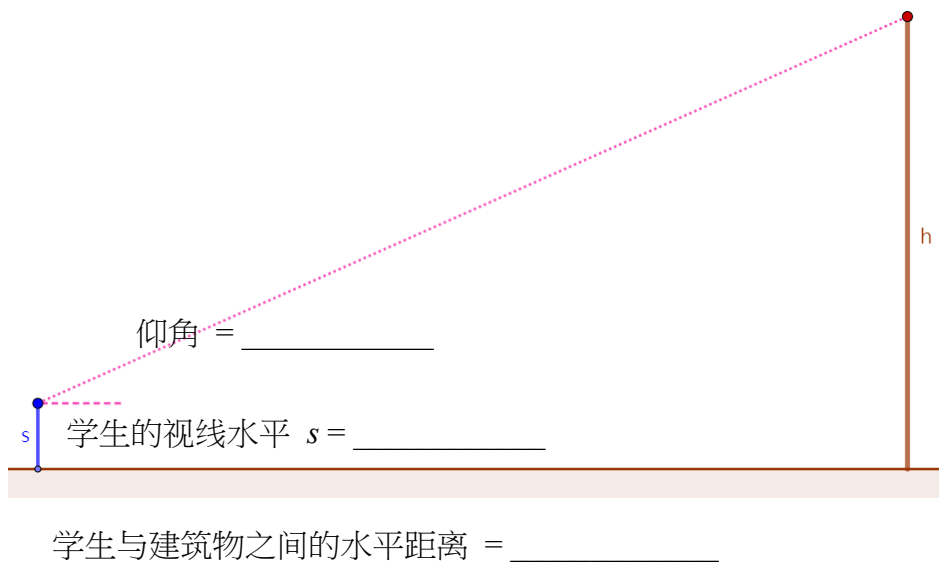


3. 我们可以运用问题 2 中的方法来估算建筑物的高度。

(a) 作出在估算中必要的假设。

(b) 由此，估算建筑物的高度 h 。

[你可以参考以下的小程式：<https://www.geogebra.org/m/yMEN6puf>]



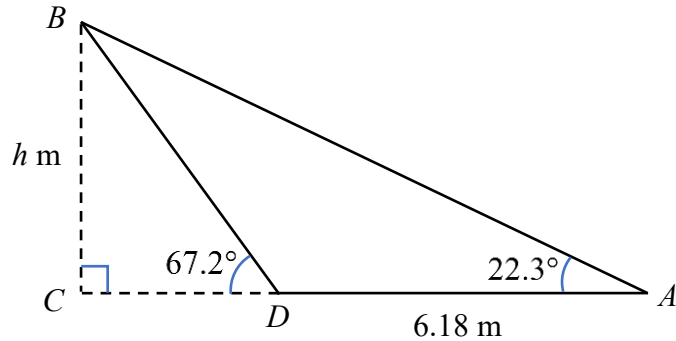
4. 以上的估算有什么可能遇到的环境限制？

活动 2B

当量度水平距离不完全可行时，运用三角比来估算高度。

5. 例子：

已知 CDA 是一条直线。求 h 的值。



解：

在 $\triangle BCD$ ，

$$\tan 67.2^\circ = \frac{h}{CD}$$

$$CD = \frac{h}{\tan 67.2^\circ} \quad \dots\dots(1)$$

在 $\triangle ABC$ ，

$$\tan 22.3^\circ = \frac{h}{CD + 6.18}$$

$$CD + 6.18 = \frac{h}{\tan 22.3^\circ} \quad \dots\dots(2)$$

把 (1) 代入 (2)，可得：

$$\frac{h}{\tan 67.2^\circ} + 6.18 = \frac{h}{\tan 22.3^\circ}$$

$$6.18 = \frac{h}{\tan 22.3^\circ} - \frac{h}{\tan 67.2^\circ}$$

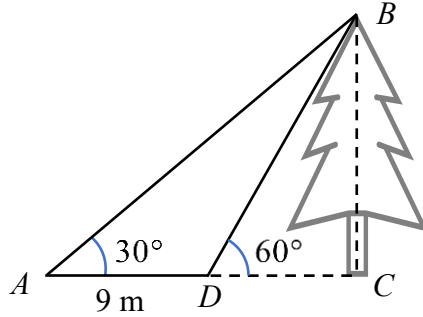
$$6.18 = h \left(\frac{1}{\tan 22.3^\circ} - \frac{1}{\tan 67.2^\circ} \right)$$

$$6.18 \div \left(\frac{1}{\tan 22.3^\circ} - \frac{1}{\tan 67.2^\circ} \right) = h$$

$$h = 3.06$$

6. 即时练习：

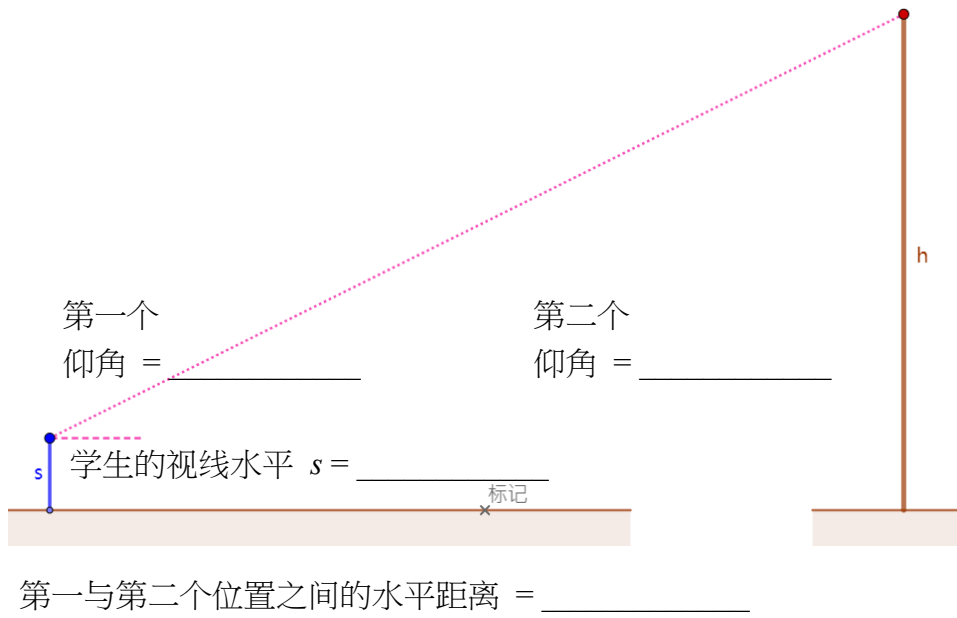
在图中，我们想估算树 BC 的高度。已知 $\angle A=30^\circ$ ， $\angle BDC=60^\circ$ ，以及 A 和 D 之间的距离为 9 m。假设 ADC 是一条直线且 $BC \perp AC$ 。求树 BC 的高度。



7. 我们可以运用问题 6 中的方法来估算建筑物的高度。

- (a) 作出在估算中必要的假设。
- (b) 由此，估算建筑物的高度 h 。

[你可以参考以下的小程式：<https://www.geogebra.org/m/djurma4f>]



创建建筑物的 3D 虚拟模型

工作纸 3

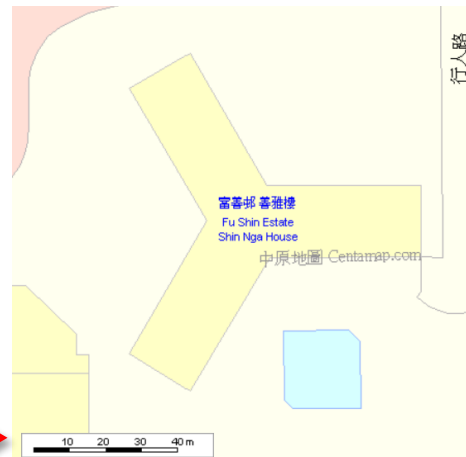
活动 3

创造建筑物的 3D 模型。

1. 在估算了建筑物的高度之后，我们可以利用地图找出它的横向尺寸。
香港有一些线上的地图，例如：

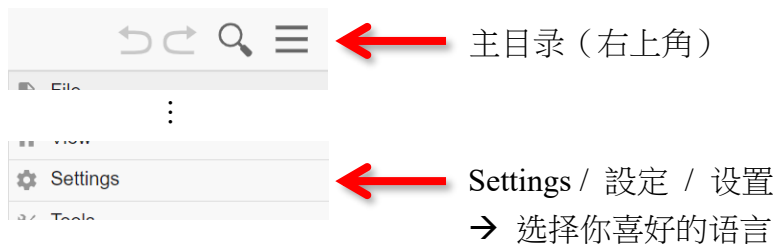
➤ Centamap.com: <http://hk.centamap.com/gc/home.aspx>

截取或下载目标建筑物的地图
并搭配比例尺，
这将会使我们能够
按比例创造其 3D 模型。



有了建筑物的高度和横向尺寸，我们可以运用 GeoGebra 创建一个虚拟的 3D 模型。

2. 前往 GeoGebra 官方网站：<https://www.geogebra.org/classic>
我们可以设定 GeoGebra 的语言：



提示

在 GeoGebra 中，用完一个工具后，选择「移动」工具是一个好的做法。
你可以理解这个做法为：

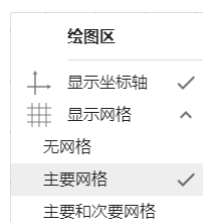


3. 以下的步骤将引导我们创造建筑物的 3D 模型。

步骤	描述
----	----

i. 设定网格

- 在绘图区上按鼠标右键
- 「显示网格」→ 勾选「主要网格」



ii. 设定网格的刻度间距

- 在绘图区上按鼠标右键
- 点选「绘图区」
- 到「网格」页
→ 「网格类型」→ 选择「主要网格」
- 勾选「刻度间距」
- 设定 $x = 1$ 和 $y = 1$

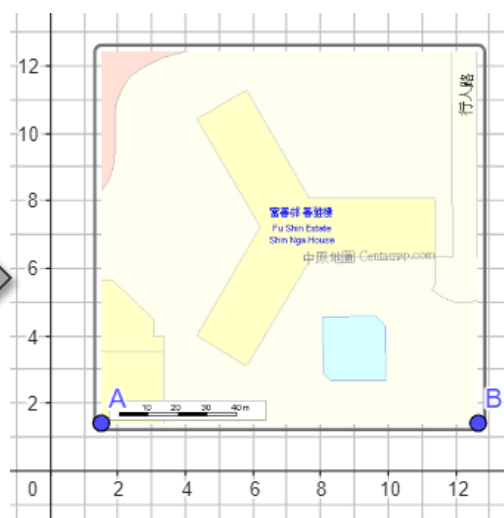
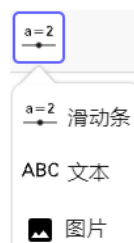


备注：

这将有助于定义你 3D 模型的比例。

iii. 汇入建筑物的地图

- 使用「图片」工具，从档案中指定要插入的图片
- 到「上传」页 → 「浏览」
- 上传地图



步骤 描述

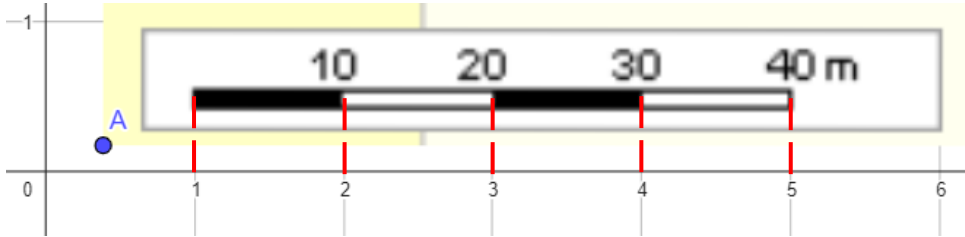
iv. 调整地图的大小

- 移动点 A 和 B，以调整地图的大小
- 隐藏点 A 和 B

点	
○	A = (0.38, 0.18)
○	B = (13.28, 0.17)

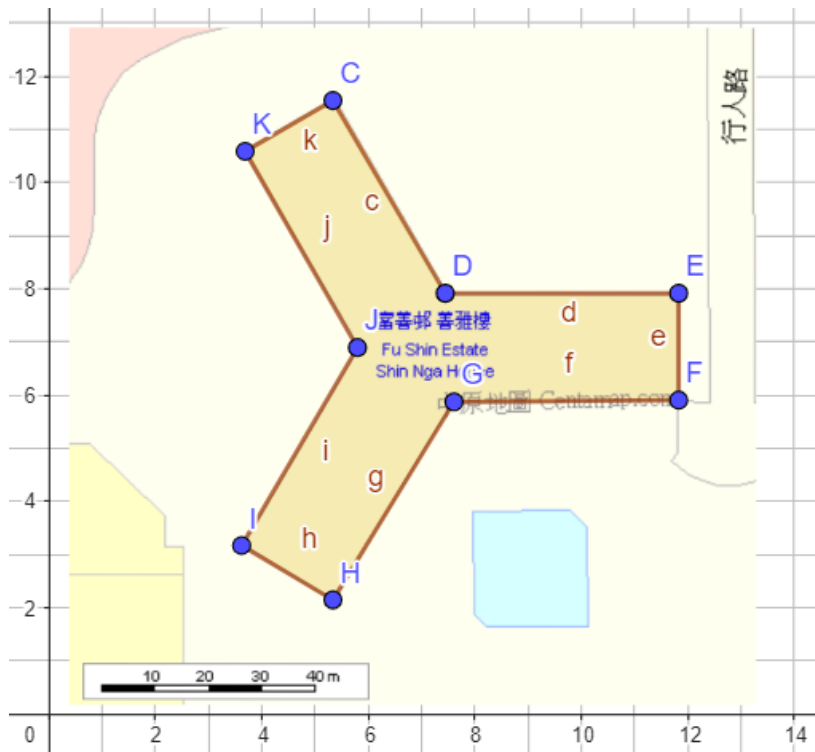
备注：

如果格线的间距与地图的比例匹配，创建 3D 模型时则更容易确保比例正确。



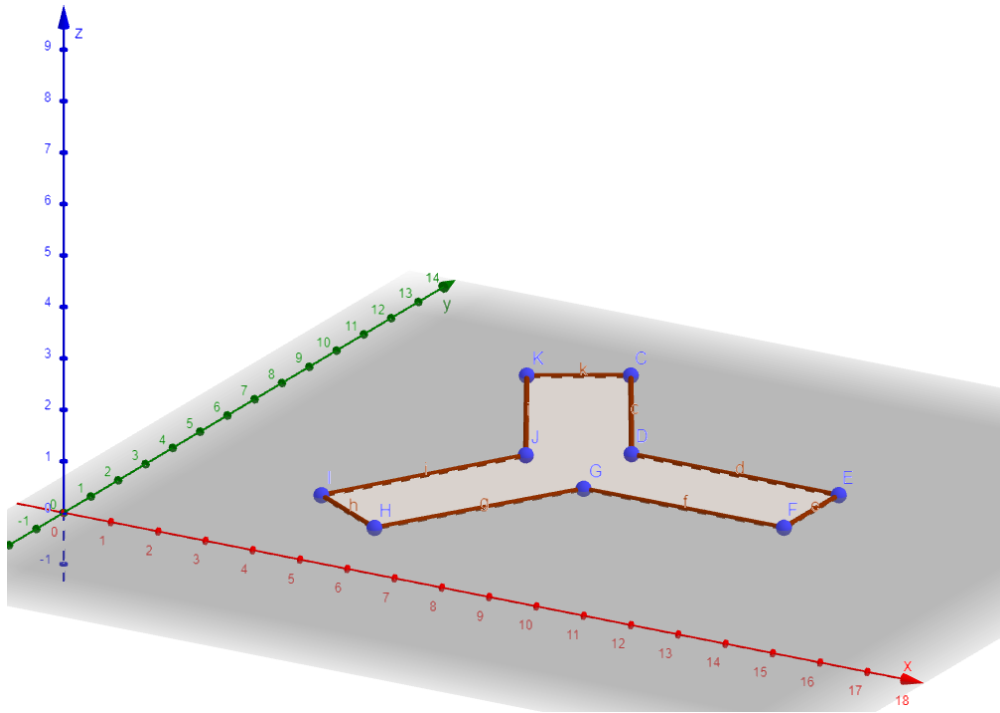
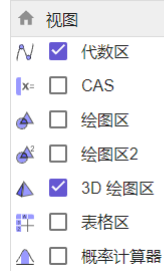
v. 绘画建筑物的底

- 使用「描点」工具绘画建筑物的角
- 使用「多边形」工具连接所有角，以绘画建筑物的底



步骤 描述

- vi. 显示 3D 绘图区
- 「主目录」(右上角) → 「视图」
 - 勾选「3D 绘图区」
 - 取消勾选「绘图区」
 - 调整视域



提示

要调整 3D 绘图区的视域

- 使用「移动视图」工具
- 首先，你可以把它垂直移动
- 点击一下后，你可以把它水平移动
- 右下角有一些有用的按钮



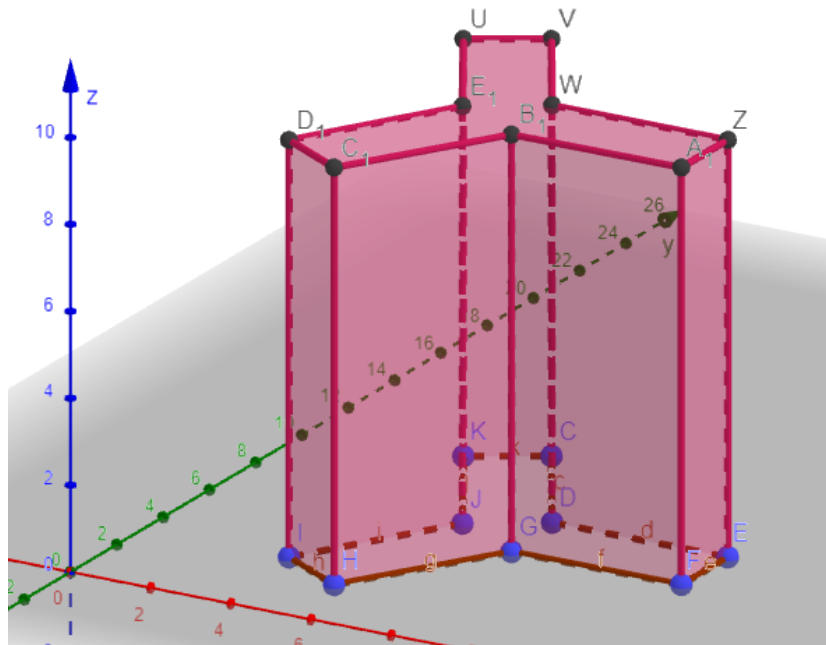
- 标准视图：返回初始位置和视域
- 放大
- 缩小

步骤 描述

vii. 创建建筑物

(以 96 m 高的建筑物为例，根据地图的比例，我们需要输入 9.6)

- 使用「拉出柱体」工具，
 点选建筑物的底
- 输入 9.6 作为它的高度



4. 这个 3D 模型有什么假设？



创建建筑物的 3D 虚拟模型

你将进行一项创建建筑物的 3D 虚拟模型的任务。我们可以先思考一下：该如何准确测量并确定建筑物的高度呢？在现实世界中，建筑师、工程师和城市规划师依靠数学概念来估算建筑物的尺寸，这对开发和施工项目至关重要。

想像一下，你站在建筑物外，配备简单的工具和数学知识，准备估算其高度，然后创建其 3D 模型。这样的任务不仅会让你更深入理解所涉及的数学概念，还能让你亲身体会这些概念在现实世界中的实际应用。

最重要的是，你将学会在创建模型过程中作出简化的假设和认清局限性，这只是由于缺乏专业的工具或精确的测量。我们未来将能够创建更准确的模型！

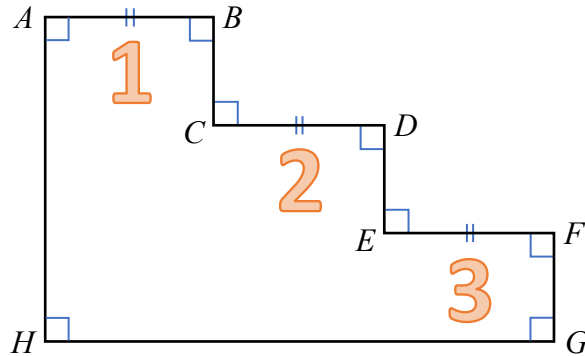
创建建筑物的 3D 虚拟模型

工作纸 1

活动 1

讨论一个估算高度的数学模型。

1. 下图展示一个颁奖台 $ABCDEFGH$ 。



(a) 若 $AB = CD = EF = 60 \text{ cm}$ ，求颁奖台的长度 HG 。

$$\begin{aligned}GH &= 60 \text{ cm} \times 3 \\ &= 180 \text{ cm}\end{aligned}$$

(b) 已知 $BC = 32 \text{ cm}$ 。一位学生估算高度 AH 如下。

$$AH = 32 \text{ cm} \times 3 = 96 \text{ cm}$$

他作了什么主要的假设？这个假设合理吗？

学生假设每个台阶的高度相等（ 32 cm ）。

这个假设是合理的，因为它考虑到设计的一致性。在许多建筑结构中，楼梯通常被设计成具有相同的梯级高度。这种设计的一致性有助于确保安全和使用的便利性，因为人们在上下楼梯时通常期望梯级的高度是一致的。

[学生可能会主张该假设是不合理的。例如：

该假设是不合理的，因为在真实世界的情境中可能存在变化，原因包括特定设计、施工错误或长期磨损等因素。]

2. 一位学生住在一座 17 层楼高的建筑物中，并希望估算其高度。他提出了以下的方法。

- 步骤 1：量度楼梯一个梯级的高度 (h)。
- 步骤 2：数算建筑物某一层的梯级数目 (n)。
- 步骤 3：数算建筑物的层数 (k)。
- 步骤 4：制定模型：

$$\text{建筑物高度} = h \cdot n \cdot k$$

在第 12 层，一段楼梯有 16 个梯级。他测量了第 7 个梯级，发现它的上升高度为 15.2 cm。

运用他的模型来估算建筑的高度，以 m 为单位。

$$\begin{aligned} \text{建筑物的高度} \\ &= 15.2 \text{ cm} \times 16 \times 17 \\ &= 4134.4 \text{ cm} \\ &= 41 \text{ m} \end{aligned}$$

3. 问题 2 中的模型有什么假设和局限性？

假设：

1. 梯级的高度 (h) 相等
2. 垂直的阶梯
3. 每层楼 (k) 的梯级数目 (n) 相同

局限性：这个模型忽略了延伸到楼梯区域之外的部分，例如屋顶或其他建筑组件。

4. 使用这种建模方法有什么可能的环境限制？

1. 无法进入的区域：在某些情况下，建筑物的某些部分可能是私人区域，无法进行数算和测量梯级。
2. 安全问题：进入建筑物的楼梯可能存在危险，尤其是在陌生或不安全的环境中。

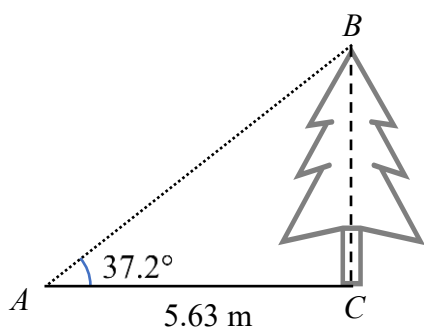
创建建筑物的 3D 虚拟模型

工作纸 2

活动 2A

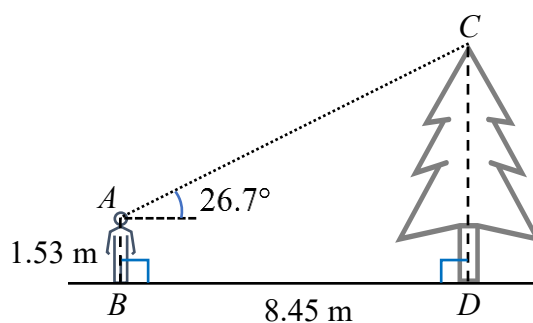
运用三角比估算高度。

1. 在图中，树 BC 投下一个 5.63 m 长的影子 (AC) 且 $\angle A = 37^\circ$ 。假设 $BC \perp AC$ 。
求树 BC 的高度。



$$\begin{aligned}\tan 37.2^\circ &= \frac{BC}{5.63} \\ BC &= 5.63 \tan 37.2^\circ \\ &= 4.27\text{ m}\end{aligned}$$

2. 在图中，一位学生站在点 B ，距离树 CD 有 8.45 m 。已知他的视线水平高于地面 1.53 m 。他发现从他的眼睛 A 到树顶部的仰角是 26.7° 。
求树 CD 的高度。



作线 $AE \perp CD$

$$AE = 8.45\text{ m}$$

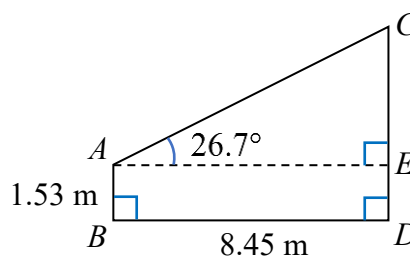
$$\tan 26.7^\circ = \frac{CE}{8.45}$$

$$CE = 8.45 \tan 26.7^\circ$$

$$CD = CE + ED$$

$$= 8.45 \tan 26.7^\circ + 1.53$$

$$= 5.78\text{ m}$$

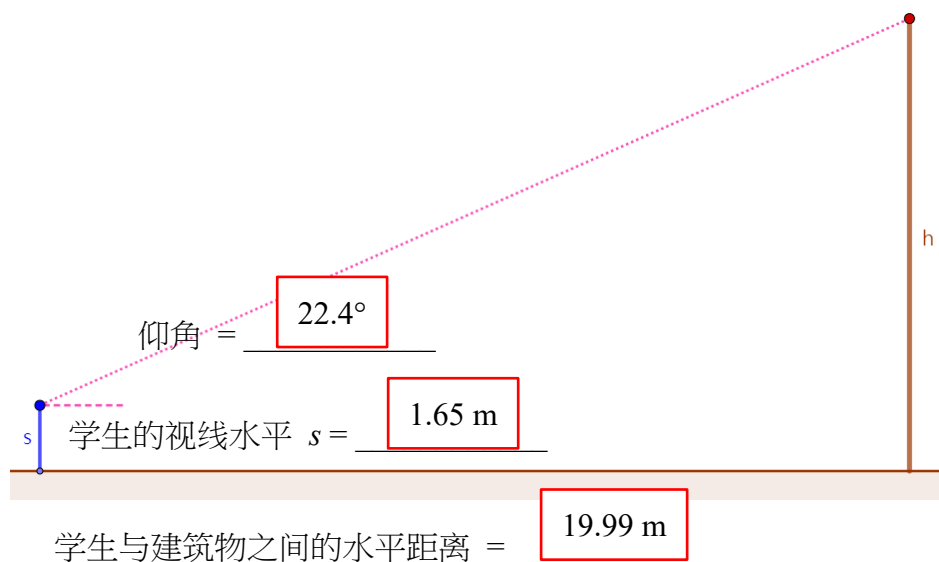


3. 我们可以运用问题 2 中的方法来估算建筑物的高度。

(a) 作出在估算中必要的假设。

(b) 由此，估算建筑物的高度 h 。

[你可以参考以下的小程式：<https://www.geogebra.org/m/ymen6puf>]



(a) 假设：

1. 垂直建筑：地面和建筑物之间的角度确切为 90° 。
2. 地面状态：地面平坦，没有凹凸不平之处，因为这可能会影响测量学生与建筑物之间的水平距离的准确性。
3. 地面水平：学生站立的位置和建筑物的基座处于相同的水平。

(b) [基于上述的一组可能测量值]

由学生的眼睛，作一条垂直于建筑物的水平线。

设 x 为未知数，如图所示。

$$\tan 22.4^\circ = \frac{x}{19.99}$$

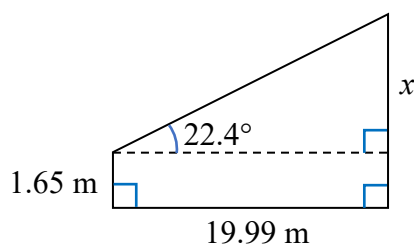
$$CE = 19.99 \tan 22.4^\circ$$

$$h = x + 1.65$$

$$= 19.99 \tan 22.4^\circ + 1.65$$

$$= 9.89 \text{ m}$$

\therefore 建筑物的高度是 9.89 m 。



4. 以上的估算有什么可能遇到的环境限制？

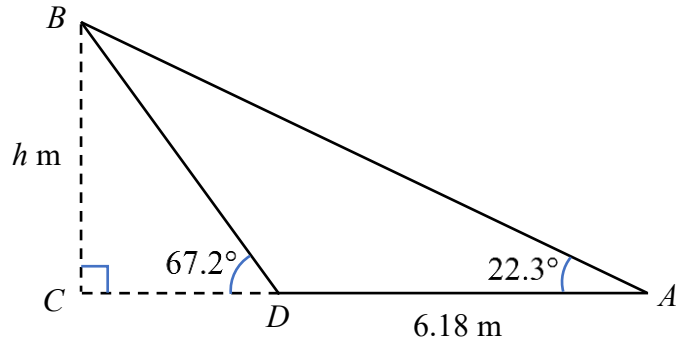
1. 天气情况：恶劣的天气情况（例如浓雾或下雨）可能会遮挡视线，影响测量角度的准确性。
2. 障碍物：可能会有障碍物阻碍测量学生站立位置和建筑物基座之间的距离。

活动 2B

当量度水平距离不完全可行时，运用三角比来估算高度。

5. 例子：

已知 CDA 是一条直线。求 h 的值。



解：

在 $\triangle BCD$ ，

$$\tan 67.2^\circ = \frac{h}{CD}$$

$$CD = \frac{h}{\tan 67.2^\circ} \quad \dots\dots(1)$$

在 $\triangle ABC$ ，

$$\tan 22.3^\circ = \frac{h}{CD + 6.18}$$

$$CD + 6.18 = \frac{h}{\tan 22.3^\circ} \quad \dots\dots(2)$$

把 (1) 代入 (2)，可得：

$$\frac{h}{\tan 67.2^\circ} + 6.18 = \frac{h}{\tan 22.3^\circ}$$

$$6.18 = \frac{h}{\tan 22.3^\circ} - \frac{h}{\tan 67.2^\circ}$$

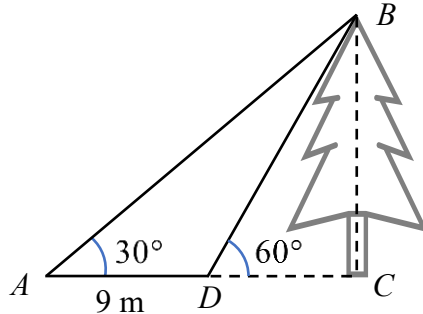
$$6.18 = h \left(\frac{1}{\tan 22.3^\circ} - \frac{1}{\tan 67.2^\circ} \right)$$

$$6.18 \div \left(\frac{1}{\tan 22.3^\circ} - \frac{1}{\tan 67.2^\circ} \right) = h$$

$$h = 3.06$$

6. 即时练习：

在图中，我们想估算树 BC 的高度。已知 $\angle A = 30^\circ$ ， $\angle BDC = 60^\circ$ ，以及 A 和 D 之间的距离为 9 m 。假设 ADC 是一条直线且 $BC \perp AC$ 。求树 BC 的高度。



设 $BC = h\text{ m}$ 和 $DC = x\text{ m}$ 。

在 $\triangle BCD$ ，

$$\tan 60^\circ = \frac{h}{x}$$

$$x = \frac{h}{\tan 60^\circ} \dots\dots(1)$$

在 $\triangle ABC$ ，

$$\tan 30^\circ = \frac{h}{x+9}$$

$$x+9 = \frac{h}{\tan 30^\circ} \dots\dots(2)$$

把 (1) 代入 (2)，可得：

$$\frac{h}{\tan 60^\circ} + 9 = \frac{h}{\tan 30^\circ}$$

$$9 = \frac{h}{\tan 30^\circ} - \frac{h}{\tan 60^\circ}$$

$$9 = h\left(\frac{1}{\tan 30^\circ} - \frac{1}{\tan 60^\circ}\right)$$

$$9 \div \left(\frac{1}{\tan 30^\circ} - \frac{1}{\tan 60^\circ}\right) = h$$

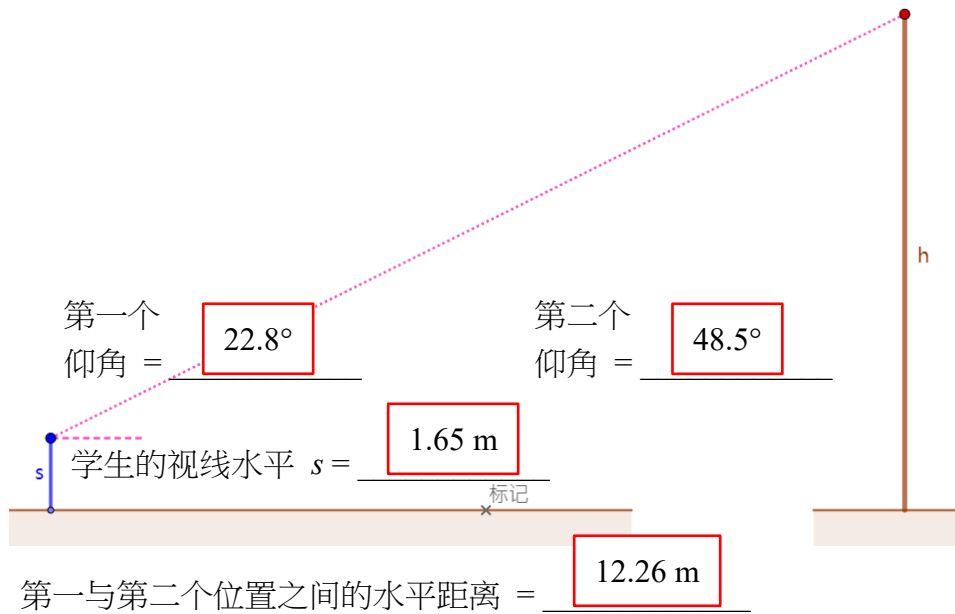
$$h = 7.79$$

$\therefore BC = 7.79\text{ m}$

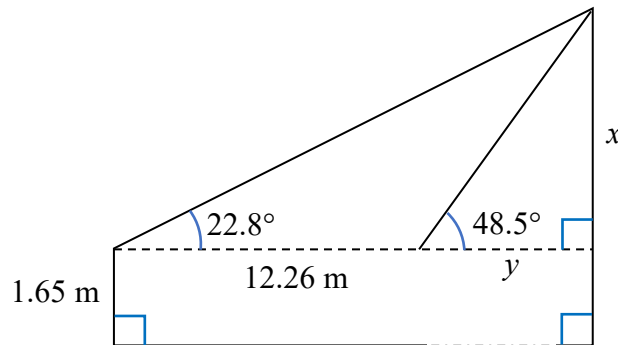
7. 我们可以运用问题 6 中的方法来估算建筑物的高度。

- (a) 作出在估算中必要的假设。
- (b) 由此，估算建筑物的高度 h 。

[你可以参考以下的小程式：<https://www.geogebra.org/m/djurma4f>]



- (a) 假设：
地面水平：学生站立的两个位置和建筑物的基座处于相同的水平位置且共线。
- (b) [基于上述的一组可能测量值]
由学生的眼睛，作一条垂直于建筑物的水平线。
设 x 和 y 为未知数，如图所示。



$$\tan 48.5^\circ = \frac{x}{y}$$

$$y = \frac{x}{\tan 48.5^\circ} \quad \dots\dots(1)$$

$$\tan 22.8^\circ = \frac{x}{y+12.26}$$

$$y+12.26 = \frac{x}{\tan 22.8^\circ} \quad \dots\dots(2)$$

把 (1) 代入 (2)，可得

$$\frac{x}{\tan 48.5^\circ} + 12.26 = \frac{x}{\tan 22.8^\circ}$$

$$12.26 = \frac{x}{\tan 22.8^\circ} - \frac{x}{\tan 48.5^\circ}$$

$$12.26 = x \left(\frac{1}{\tan 22.8^\circ} - \frac{1}{\tan 48.5^\circ} \right)$$

$$12.26 \div \left(\frac{1}{\tan 22.8^\circ} - \frac{1}{\tan 48.5^\circ} \right) = x$$

$$x = 8.205165382$$

$$h = 8.205165382 + 1.65$$

$$= 9.86$$

\therefore 建筑物的高度是 9.86 m。

创建建筑物的 3D 虚拟模型

工作纸 3

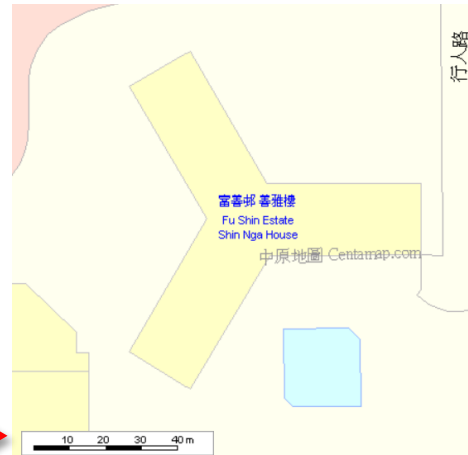
活动 3

创造建筑物的 3D 模型。

1. 在估算了建筑物的高度之后，我们可以利用地图找出它的横向尺寸。
香港有一些线上的地图，例如：

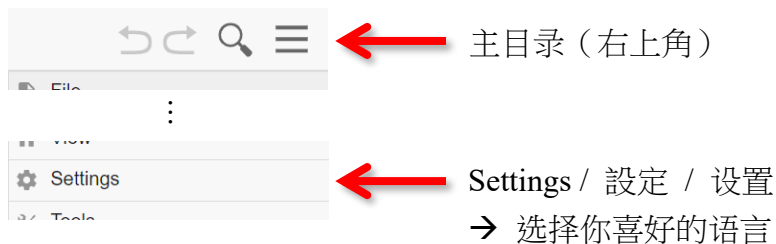
➤ Centamap.com: <http://hk.centamap.com/gc/home.aspx>

截取或下载目标建筑物的地图
并搭配比例尺，
这将会使我们能够
按比例创造其 3D 模型。



有了建筑物的高度和横向尺寸，我们可以运用 GeoGebra 创建一个虚拟的 3D 模型。

2. 前往 GeoGebra 官方网站：<https://www.geogebra.org/classic>
我们可以设定 GeoGebra 的语言：



提示

在 GeoGebra 中，用完一个工具后，选择「移动」工具是一个好的做法。
你可以理解这个做法为：



3. 以下的步骤将引导我们创造建筑物的 3D 模型。

步骤	描述
----	----

i. 设定网格

- 在绘图区上按鼠标右键
- 「显示网格」→ 勾选「主要网格」



ii. 设定网格的刻度间距

- 在绘图区上按鼠标右键
- 点选「绘图区」
- 到「网格」页
→ 「网格类型」→ 选择「主要网格」
- 勾选「刻度间距」
- 设定 $x = 1$ 和 $y = 1$

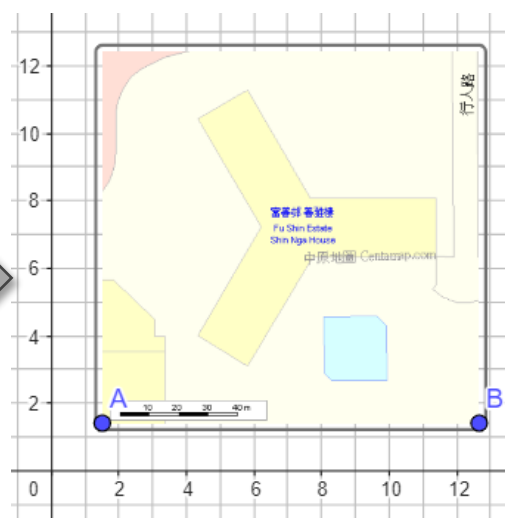
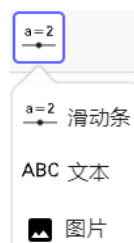


备注：

这将有助于定义你 3D 模型的比例。

iii. 汇入建筑物的地图

- 使用「图片」工具，从档案中指定要插入的图片
- 到「上传」页 → 「浏览」
- 上传地图



步骤 描述

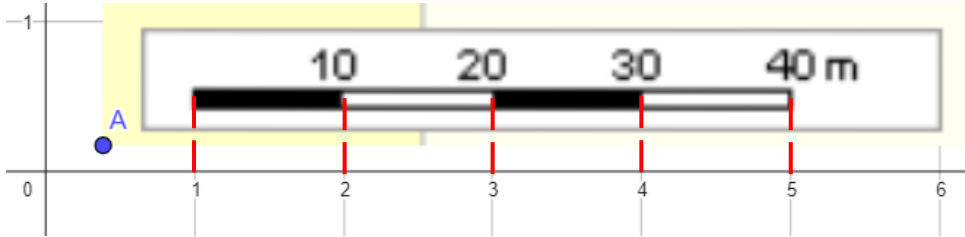
iv. 调整地图的大小

- 移动点 A 和 B，以调整地图的大小
- 隐藏点 A 和 B

点	
○	A = (0.38, 0.18)
○	B = (13.28, 0.17)

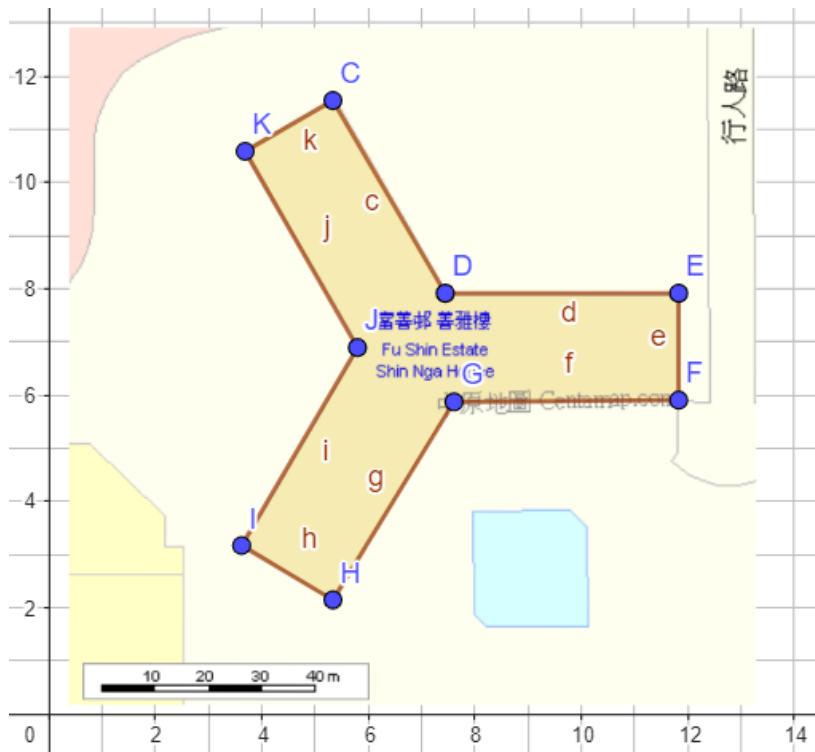
备注：

如果格线的间距与地图的比例匹配，创建 3D 模型时则更容易确保比例正确。



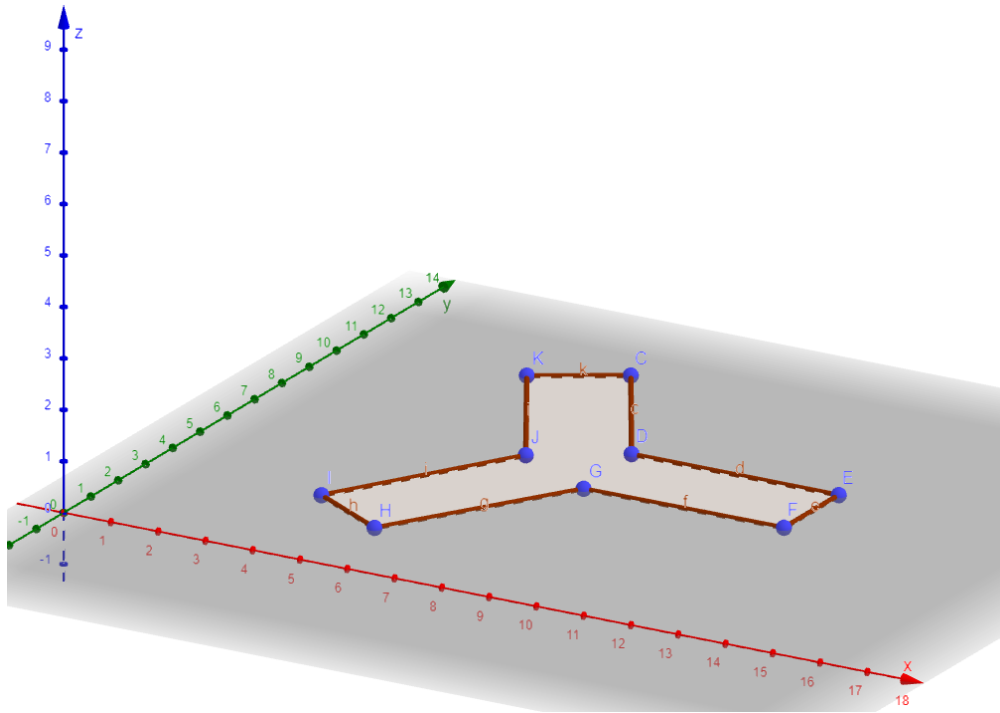
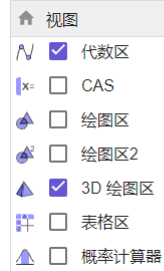
v. 绘画建筑物的底

- 使用「描点」工具绘画建筑物的角
- 使用「多边形」工具连接所有角，以绘画建筑物的底



步骤 描述

- vi. 显示 3D 绘图区
- 「主目录」(右上角) → 「视图」
 - 勾选「3D 绘图区」
 - 取消勾选「绘图区」
 - 调整视域



提示

要调整 3D 绘图区的视域

- 使用「移动视图」工具
- 首先，你可以把它垂直移动
- 点击一下后，你可以把它水平移动
- 右下角有一些有用的按钮



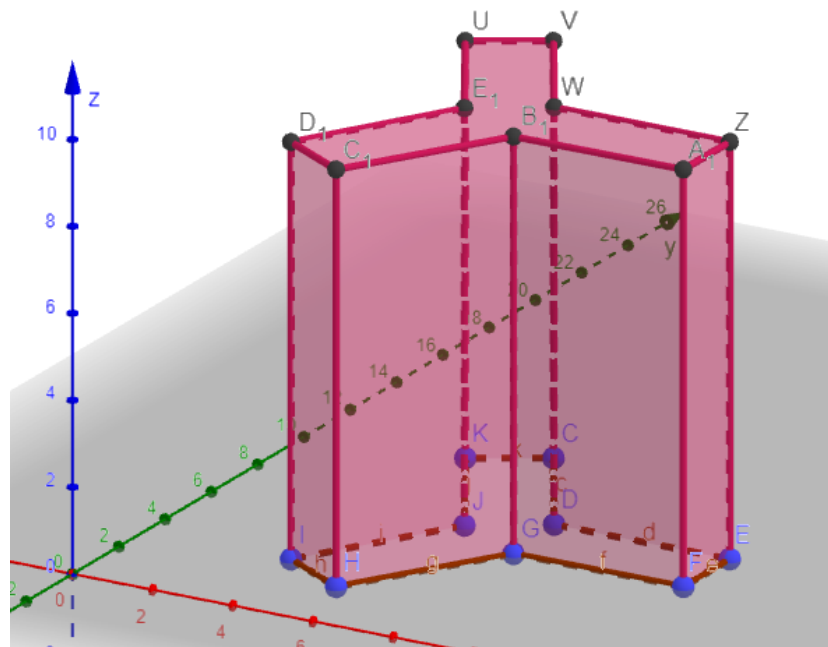
- 标准视图：返回初始位置和视域
- 放大
- 缩小

步骤 描述

vii. 创造建筑物

(以 96 m 高的建筑物为例，根据地图的比例，我们需要输入 9.6)

- 使用「拉出柱体」工具，
 點選建筑物的底
- 输入 9.6 作为它的高度



4. 这个 3D 模型有什么假设？

1. 建筑物形状：建筑物是一个角柱体，在整个高度上具有均匀横切面。
2. 建筑物顶部：建筑物的屋顶或最顶层是完全平坦的。