

## 創建建築物的 3D 虛擬模型

你將進行一項創建建築物的 3D 虛擬模型的任務。我們可以先思考一下：該如何準確測量並確定建築物的高度呢？在現實世界中，建築師、工程師和城市規劃師依靠數學概念來估算建築物的尺寸，這對開發和施工項目至關重要。

想像一下，你站在建築物外，配備簡單的工具和數學知識，準備估算其高度，然後創建其 3D 模型。這樣的任務不僅會讓你更深入理解所涉及的數學概念，還能讓你親身體會這些概念在現實世界中的實際應用。

最重要的是，你將學會在創建模型過程中作出簡化的假設和認清局限性，這只是由於缺乏專業的工具或精確的測量。我們未來將能夠創建更準確的模型！

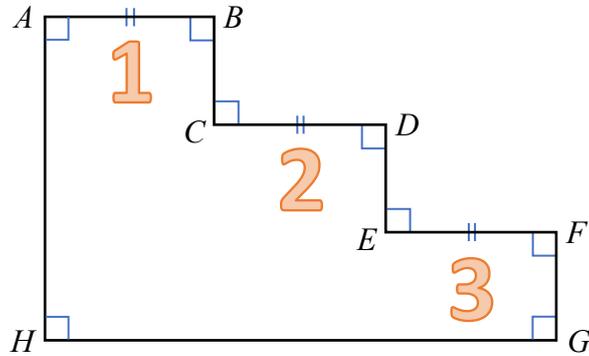
# 創建建築物的 3D 虛擬模型

## 工作紙 1

### 活動 1

討論一個估算高度的數學模型。

1. 下圖展示一個頒獎台  $ABCDEFGH$ 。



(a) 若  $AB = CD = EF = 60$  cm，求頒獎台的長度  $HG$ 。

---

---

---

(b) 已知  $BC = 32$  cm。一位學生估算高度  $AH$  如下。

$$AH = 32 \text{ cm} \times 3 = 96 \text{ cm}$$

他作了什麼主要的假設？這個假設合理嗎？

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

2. 一位學生住在一座 17 層樓高的建築物中，並希望估算其高度。他提出了以下的方法。

- 步驟 1：量度樓梯一個梯級的高度 ( $h$ )。
- 步驟 2：數算建築物某一層的梯級數目 ( $n$ )。
- 步驟 3：數算建築物的層數 ( $k$ )。
- 步驟 4：制定模型：

$$\text{建築物高度} = h \cdot n \cdot k$$

在第 12 層，一段樓梯有 16 個梯級。他測量了第 7 個梯級，發現它的上升高度為 15.2 cm。

運用他的模型來估算建築的高度，以 m 為單位。

---

---

---

---

3. 問題 2 中的模型有什麼假設和局限性？

---

---

---

---

---

---

---

4. 使用這種建模方法有什麼可能的環境限制？

---

---

---

---

---

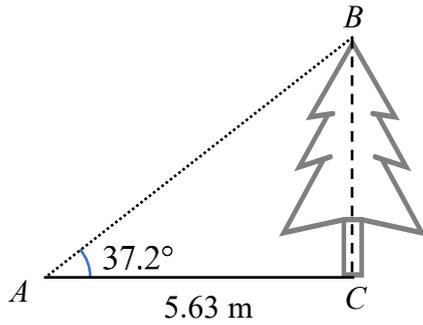
## 創建建築物的 3D 虛擬模型

### 工作紙 2

#### 活動 2A

運用三角比估算高度。

1. 在圖中，樹  $BC$  投下一個  $5.63\text{ m}$  長的影子 ( $AC$ ) 且  $\angle A = 37^\circ$ 。假設  $BC \perp AC$ 。  
求樹  $BC$  的高度。



---

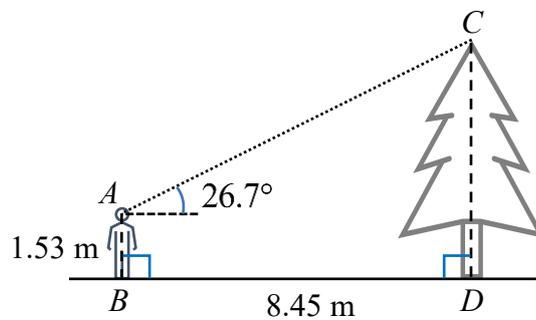
---

---

---

---

2. 在圖中，一位學生站在點  $B$ ，距離樹  $CD$  有  $8.45\text{ m}$ 。已知他的視線水平高於地面  $1.53\text{ m}$ 。他發現從他的眼睛  $A$  到樹頂部的仰角是  $26.7^\circ$ 。  
求樹  $CD$  的高度。



---

---

---

---

---

---

---

---



4. 以上的估算有什麼可能遇到的環境限制？

---

---

---

---

---

---

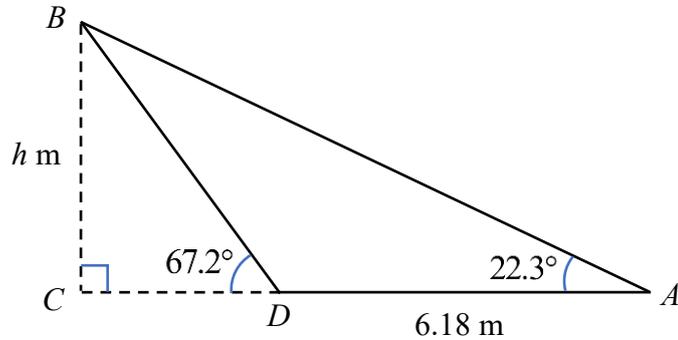
---

**活動 2B**

當量度水平距離不完全可行時，運用三角比來估算高度。

5. 例子：

已知  $CDA$  是一條直線。求  $h$  的值。



解：

在  $\triangle BCD$ ，

$$\tan 67.2^\circ = \frac{h}{CD}$$

$$CD = \frac{h}{\tan 67.2^\circ} \dots\dots(1)$$

在  $\triangle ABC$ ，

$$\tan 22.3^\circ = \frac{h}{CD + 6.18}$$

$$CD + 6.18 = \frac{h}{\tan 22.3^\circ} \dots\dots(2)$$

把 (1) 代入 (2)，可得：

$$\frac{h}{\tan 67.2^\circ} + 6.18 = \frac{h}{\tan 22.3^\circ}$$

$$6.18 = \frac{h}{\tan 22.3^\circ} - \frac{h}{\tan 67.2^\circ}$$

$$6.18 = h \left( \frac{1}{\tan 22.3^\circ} - \frac{1}{\tan 67.2^\circ} \right)$$

$$6.18 \div \left( \frac{1}{\tan 22.3^\circ} - \frac{1}{\tan 67.2^\circ} \right) = h$$

$$h = 3.06$$







## 創建建築物的 3D 虛擬模型

### 工作紙 3

#### 活動 3

#### 創造建築物的 3D 模型。

1. 在估算了建築物的高度之後，我們可以利用地圖找出它的橫向尺寸。  
香港有一些線上的地圖，例如：

- Centamap.com: <http://hk.centamap.com/gc/home.aspx>

截取或下載目標建築物的地圖  
並搭配比例尺，  
這將會使我們能夠  
按比例創造其 3D 模型。



有了建築物的高度和橫向尺寸，我們可以運用 GeoGebra 創造一個虛擬的 3D 模型。

2. 前往 GeoGebra 官方網站：<https://www.geogebra.org/classic>  
我們可以設定 GeoGebra 的語言：



#### 提示

在 GeoGebra 中，用完一個工具後，選擇「移動」工具是一個好的做法。  
你可以理解這個做法為：



3. 以下的步驟將引導我們創造建築物的 3D 模型。

步驟	描述
----	----

i. 設定格線

- 在繪圖區上按滑鼠右鍵
- 「顯示格線」→ 勾選「主格線」



ii. 設定格線的間距

- 在繪圖區上按滑鼠右鍵
- 點選「繪圖區」
- 到「格線」頁 → 「格線類型」→ 選擇「主格線」
- 勾選「間距」
- 設定  $x = 1$  和  $y = 1$

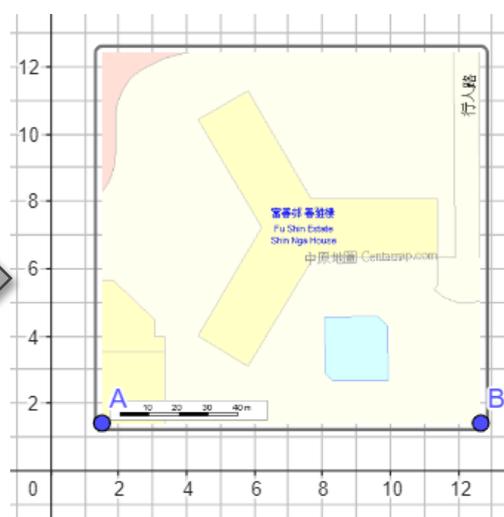
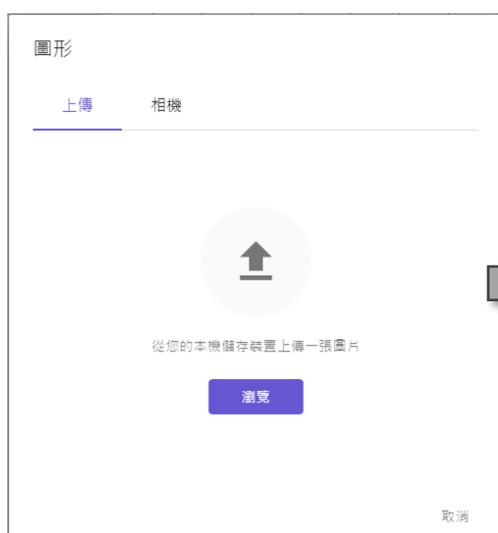


備註：

這將有助於定義你 3D 模型的比例。

iii. 匯入建築物的地圖

- 使用「插入圖片」工具，從檔案中指定要插入的圖片
- 到「上傳」頁 → 「瀏覽」
- 上傳地圖



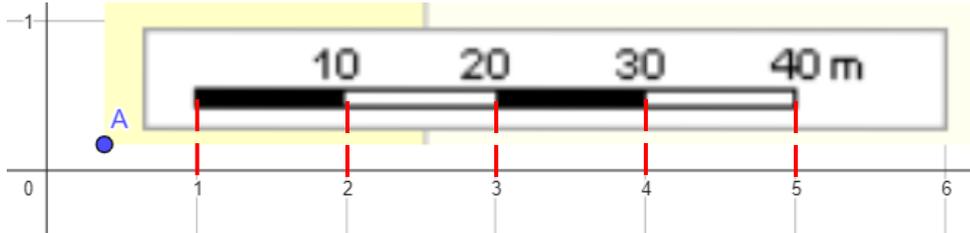
**步驟 描述**

- iv. 調整地圖的大小
- 移動點 A 和 B，以調整地圖的大小
  - 隱藏點 A 和 B

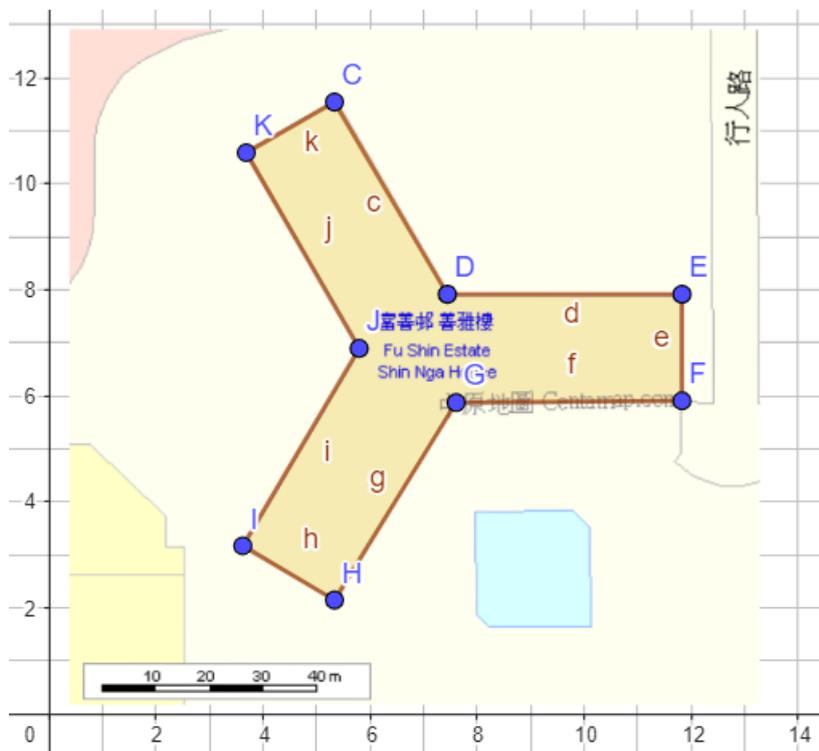
點	
A = (0.38, 0.18)	
B = (13.28, 0.17)	

備註：

如果格線的間距與地圖的比例匹配，創建 3D 模型時則更容易確保比例正確。

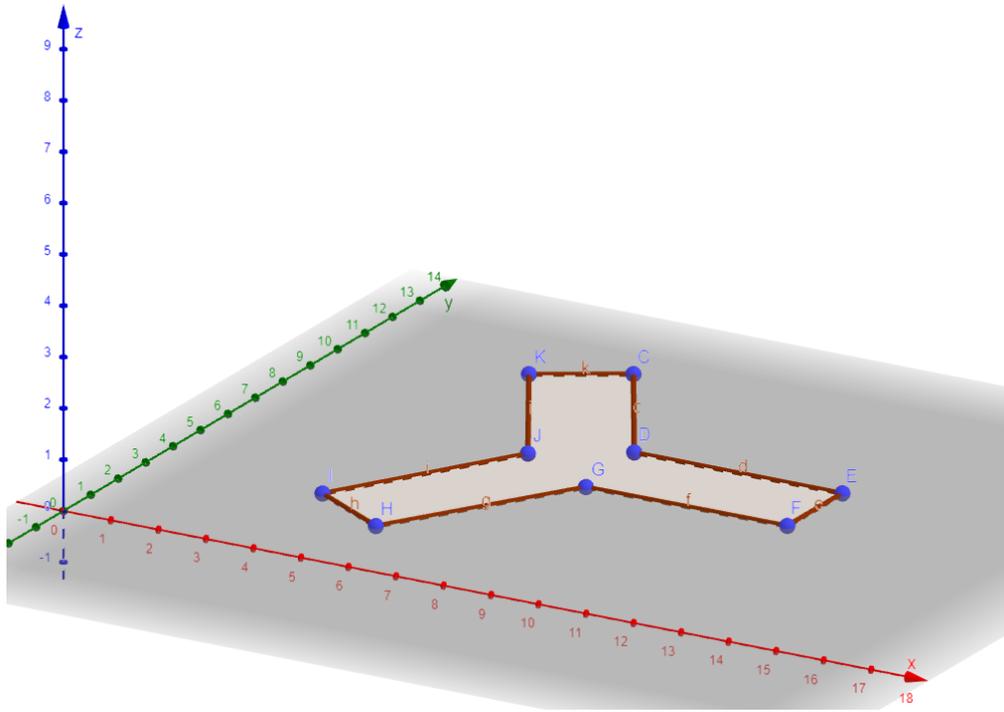
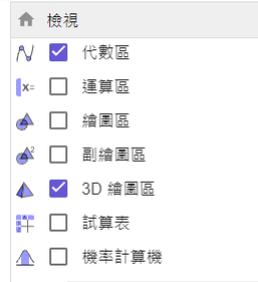


- v. 繪畫建築物的底
- 使用「新點」工具繪畫建築物的角
  - 使用「多邊形」工具連接所有角，以繪畫建築物的底



步驟 描述

- vi. 顯示 3D 繪圖區
- 「主目錄」(右上角) → 「檢視」
  - 勾選「3D 繪圖區」
  - 取消勾選「繪圖區」
  - 調整視域



提示

要調整 3D 繪圖區的視域

- 使用「移動繪圖區」工具
- 首先，你可以把它垂直移動
- 點擊一下後，你可以把它水平移動
- 右下角有一些有用的按鈕



 標準比例：返回初始位置和視域

 放大

 縮小

步驟 描述

vii. 創造建築物

(以 96 m 高的建築物為例，根據地圖的比例，我們需要輸入 9.6)

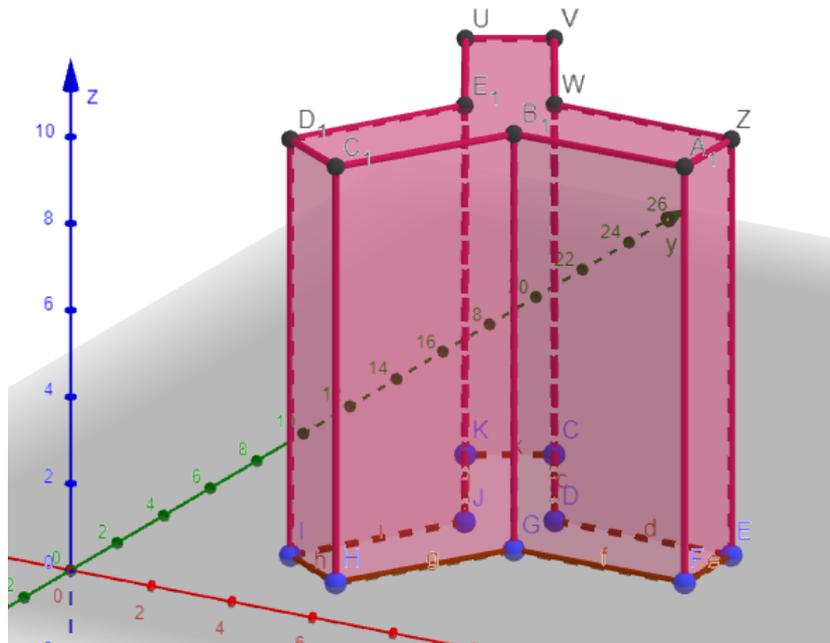
- 使用「拉成柱體」工具，點選建築物的底
- 輸入 9.6 作為它的高度



角柱

高度  
9.6

取消 確定



4. 這個 3D 模型有什麼假設？

---

---

---

---

---

---



## 創建建築物的 3D 虛擬模型

你將進行一項創建建築物的 3D 虛擬模型的任務。我們可以先思考一下：該如何準確測量並確定建築物的高度呢？在現實世界中，建築師、工程師和城市規劃師依靠數學概念來估算建築物的尺寸，這對開發和施工項目至關重要。

想像一下，你站在建築物外，配備簡單的工具和數學知識，準備估算其高度，然後創建其 3D 模型。這樣的任務不僅會讓你更深入理解所涉及的數學概念，還能讓你親身體會這些概念在現實世界中的實際應用。

最重要的是，你將學會在創建模型過程中作出簡化的假設和認清局限性，這只是由於缺乏專業的工具或精確的測量。我們未來將能夠創建更準確的模型！

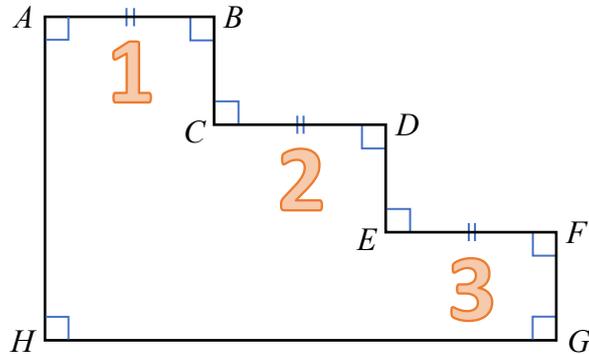
## 創建建築物的 3D 虛擬模型

### 工作紙 1

#### 活動 1

討論一個估算高度的數學模型。

1. 下圖展示一個頒獎台  $ABCDEFGH$ 。



(a) 若  $AB = CD = EF = 60 \text{ cm}$ ，求頒獎台的長度  $HG$ 。

$$\begin{aligned}GH &= 60 \text{ cm} \times 3 \\ &= 180 \text{ cm}\end{aligned}$$

(b) 已知  $BC = 32 \text{ cm}$ 。一位學生估算高度  $AH$  如下。

$$AH = 32 \text{ cm} \times 3 = 96 \text{ cm}$$

他作了什麼主要的假設？這個假設合理嗎？

學生假設每個台階的高度相等（ $32 \text{ cm}$ ）。

這個假設是合理的，因為它考慮到設計的一致性。在許多建築結構中，樓梯通常被設計成具有相同的梯級高度。這種設計的一致性有助於確保安全性和使用的便利性，因為人們在上下樓梯時通常期望梯級的高度是一致的。

*[學生可能會主張該假設是不合理的。例如：*

*該假設是不合理的，因為在真實世界的情境中可能存在變化，原因包括特定設計、施工錯誤或長期磨損等因素。]*

2. 一位學生住在一座 17 層樓高的建築物中，並希望估算其高度。他提出了以下的方法。

- 步驟 1：量度樓梯一個梯級的高度 ( $h$ )。
- 步驟 2：數算建築物某一層的梯級數目 ( $n$ )。
- 步驟 3：數算建築物的層數 ( $k$ )。
- 步驟 4：制定模型：

$$\text{建築物高度} = h \cdot n \cdot k$$

在第 12 層，一段樓梯有 16 個梯級。他測量了第 7 個梯級，發現它的上升高度為 15.2 cm。

運用他的模型來估算建築的高度，以 m 為單位。

$$\begin{aligned} \text{建築物的高度} \\ &= 15.2 \text{ cm} \times 16 \times 17 \\ &= 4134.4 \text{ cm} \\ &= 41 \text{ m} \end{aligned}$$

3. 問題 2 中的模型有什麼假設和局限性？

假設：

1. 梯級的高度 ( $h$ ) 相等
2. 垂直的階梯
3. 每層樓 ( $k$ ) 的梯級數目 ( $n$ ) 相同

局限性：這個模型忽略了延伸到樓梯區域之外的部分，例如屋頂或其他建築組件。

4. 使用這種建模方法有什麼可能的環境限制？

1. 無法進入的區域：在某些情況下，建築物的某些部分可能是私人區域，無法進行數算和測量梯級。
2. 安全問題：進入建築物的樓梯可能存在危險，尤其是在陌生或不安全的環境中。

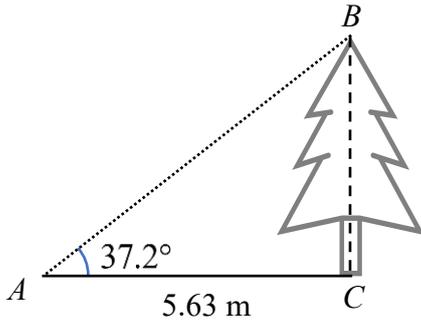
## 創建建築物的 3D 虛擬模型

### 工作紙 2

#### 活動 2A

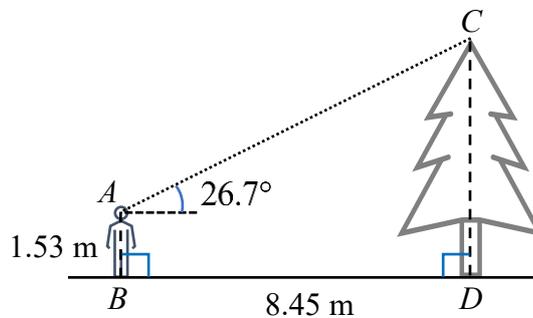
運用三角比估算高度。

1. 在圖中，樹  $BC$  投下一個  $5.63 \text{ m}$  長的影子 ( $AC$ ) 且  $\angle A = 37^\circ$ 。假設  $BC \perp AC$ 。  
求樹  $BC$  的高度。



$$\begin{aligned}\tan 37.2^\circ &= \frac{BC}{5.63} \\ BC &= 5.63 \tan 37.2^\circ \\ &= 4.27 \text{ m}\end{aligned}$$

2. 在圖中，一位學生站在點  $B$ ，距離樹  $CD$  有  $8.45 \text{ m}$ 。已知他的視線水平高於地面  $1.53 \text{ m}$ 。他發現從他的眼睛  $A$  到樹頂部的仰角是  $26.7^\circ$ 。  
求樹  $CD$  的高度。



作線  $AE \perp CD$

$$AE = 8.45 \text{ m}$$

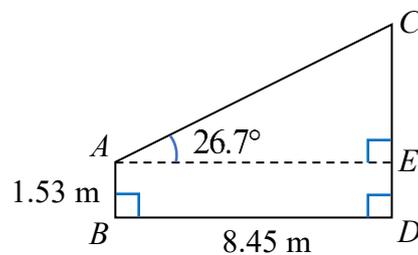
$$\tan 26.7^\circ = \frac{CE}{8.45}$$

$$CE = 8.45 \tan 26.7^\circ$$

$$CD = CE + ED$$

$$= 8.45 \tan 26.7^\circ + 1.53$$

$$= 5.78 \text{ m}$$

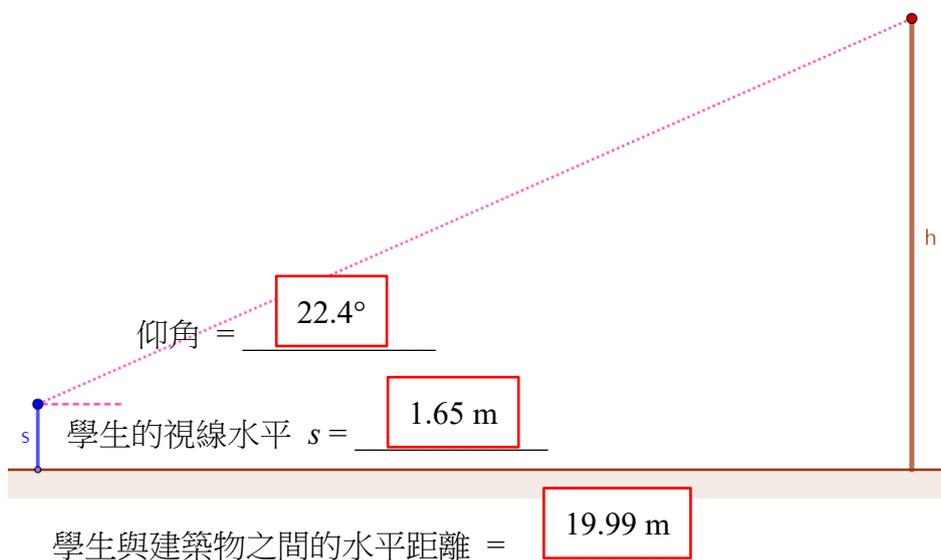


3. 我們可以運用問題 2 中的方法來估算建築物的高度。

(a) 作出在估算中必要的假設。

(b) 由此，估算建築物的高度  $h$ 。

[你可以參考以下的小程式：<https://www.geogebra.org/m/ymen6puf>]



(a) 假設：

1. 垂直建築：地面和建築物之間的角度確切為  $90^\circ$ 。
2. 地面狀態：地面平坦，沒有凹凸不平之處，因為這可能會影響測量學生與建築物之間的水平距離的準確性。
3. 地面水平：學生站立的位置和建築物的基座處於相同的水平。

(b) [基於上述的一組可能測量值]

由學生的眼睛，作一條垂直於建築物的水平線。

設  $x$  為未知數，如圖所示。

$$\tan 22.4^\circ = \frac{x}{19.99}$$

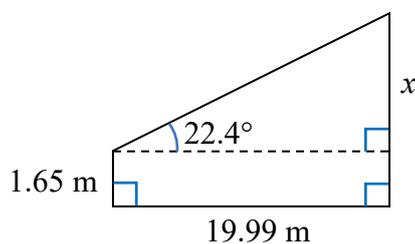
$$CE = 19.99 \tan 22.4^\circ$$

$$h = x + 1.65$$

$$= 19.99 \tan 22.4^\circ + 1.65$$

$$= 9.89 \text{ m}$$

$\therefore$  建築物的高度是  $9.89 \text{ m}$ 。



4. 以上的估算有什麼可能遇到的環境限制？

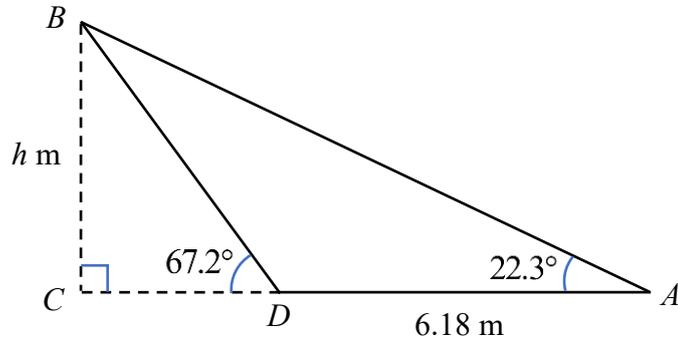
1. 天氣情況：惡劣的天氣情況（例如濃霧或下雨）可能會遮擋視線，影響測量角度的準確性。
2. 障礙物：可能會有障礙物阻礙測量學生站立位置和建築物基座之間的距離。

**活動 2B**

當量度水平距離不完全可行時，運用三角比來估算高度。

5. 例子：

已知  $CDA$  是一條直線。求  $h$  的值。



解：

在  $\triangle BCD$ ，

$$\tan 67.2^\circ = \frac{h}{CD}$$

$$CD = \frac{h}{\tan 67.2^\circ} \dots\dots(1)$$

在  $\triangle ABC$ ，

$$\tan 22.3^\circ = \frac{h}{CD + 6.18}$$

$$CD + 6.18 = \frac{h}{\tan 22.3^\circ} \dots\dots(2)$$

把 (1) 代入 (2)，可得：

$$\frac{h}{\tan 67.2^\circ} + 6.18 = \frac{h}{\tan 22.3^\circ}$$

$$6.18 = \frac{h}{\tan 22.3^\circ} - \frac{h}{\tan 67.2^\circ}$$

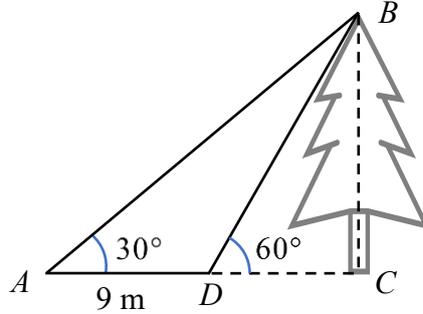
$$6.18 = h \left( \frac{1}{\tan 22.3^\circ} - \frac{1}{\tan 67.2^\circ} \right)$$

$$6.18 \div \left( \frac{1}{\tan 22.3^\circ} - \frac{1}{\tan 67.2^\circ} \right) = h$$

$$h = 3.06$$

## 6. 即時練習：

在圖中，我們想估算樹  $BC$  的高度。已知  $\angle A = 30^\circ$ ， $\angle BDC = 60^\circ$ ，以及  $A$  和  $D$  之間的距離為  $9\text{ m}$ 。假設  $ADC$  是一條直線且  $BC \perp AC$ 。求樹  $BC$  的高度。



設  $BC = h\text{ m}$  和  $DC = x\text{ m}$ 。

在  $\triangle BCD$ ，

$$\tan 60^\circ = \frac{h}{x}$$

$$x = \frac{h}{\tan 60^\circ} \dots\dots(1)$$

在  $\triangle ABC$ ，

$$\tan 30^\circ = \frac{h}{x+9}$$

$$x+9 = \frac{h}{\tan 30^\circ} \dots\dots(2)$$

把 (1) 代入 (2)，可得：

$$\frac{h}{\tan 60^\circ} + 9 = \frac{h}{\tan 30^\circ}$$

$$9 = \frac{h}{\tan 30^\circ} - \frac{h}{\tan 60^\circ}$$

$$9 = h\left(\frac{1}{\tan 30^\circ} - \frac{1}{\tan 60^\circ}\right)$$

$$9 \div \left(\frac{1}{\tan 30^\circ} - \frac{1}{\tan 60^\circ}\right) = h$$

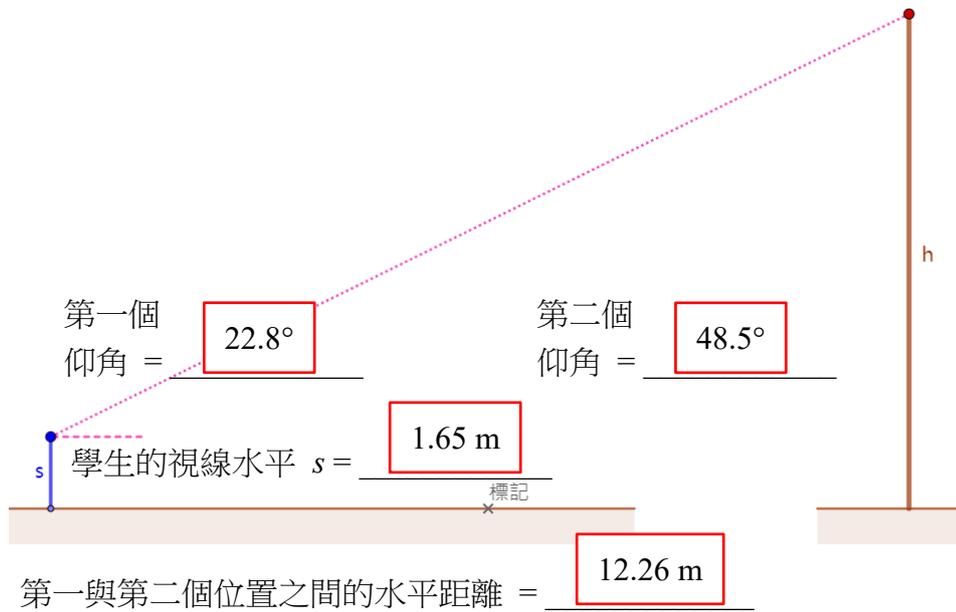
$$h = 7.79$$

$\therefore BC = 7.79\text{ m}$

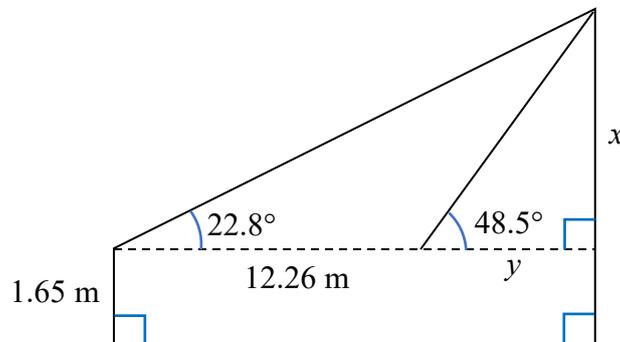
7. 我們可以運用問題 6 中的方法來估算建築物的高度。

- (a) 作出在估算中必要的假設。
- (b) 由此，估算建築物的高度  $h$ 。

[你可以參考以下的小程式：<https://www.geogebra.org/m/djurma4f>]



- (a) 假設：  
地面水平：學生站立的兩個位置和建築物的基座處於相同的水平位置且共線。
- (b) [基於上述的一組可能測量值]  
由學生的眼睛，作一條垂直於建築物的水平線。  
設  $x$  和  $y$  為未知數，如圖所示。



$$\tan 48.5^\circ = \frac{x}{y}$$

$$y = \frac{x}{\tan 48.5^\circ} \quad \dots\dots(1)$$

$$\tan 22.8^\circ = \frac{x}{y+12.26}$$

$$y+12.26 = \frac{x}{\tan 22.8^\circ} \quad \dots\dots(2)$$

把 (1) 代入 (2)，可得

$$\frac{x}{\tan 48.5^\circ} + 12.26 = \frac{x}{\tan 22.8^\circ}$$

$$12.26 = \frac{x}{\tan 22.8^\circ} - \frac{x}{\tan 48.5^\circ}$$

$$12.26 = x\left(\frac{1}{\tan 22.8^\circ} - \frac{1}{\tan 48.5^\circ}\right)$$

$$12.26 \div \left(\frac{1}{\tan 22.8^\circ} - \frac{1}{\tan 48.5^\circ}\right) = x$$

$$x = 8.205165382$$

$$h = 8.205165382 + 1.65$$

$$= 9.86$$

$\therefore$  建築物的高度是 9.86 m。

## 創建建築物的 3D 虛擬模型

### 工作紙 3

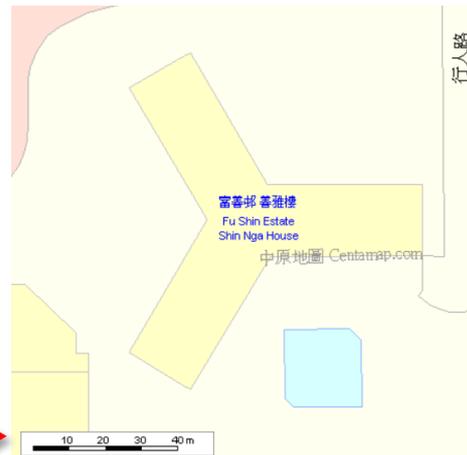
#### 活動 3

##### 創造建築物的 3D 模型。

1. 在估算了建築物的高度之後，我們可以利用地圖找出它的橫向尺寸。  
香港有一些線上的地圖，例如：

➤ Centamap.com: <http://hk.centamap.com/gc/home.aspx>

截取或下載目標建築物的地圖  
並搭配比例尺，  
這將會使我們能夠  
按比例創造其 3D 模型。



有了建築物的高度和橫向尺寸，我們可以運用 GeoGebra 創造一個虛擬的 3D 模型。

2. 前往 GeoGebra 官方網站：<https://www.geogebra.org/classic>  
我們可以設定 GeoGebra 的語言：



#### 提示

在 GeoGebra 中，用完一個工具後，選擇「移動」工具是一個好的做法。  
你可以理解這個做法為：



3. 以下的步驟將引導我們創造建築物的 3D 模型。

步驟	描述
----	----

i. 設定格線

- 在繪圖區上按滑鼠右鍵
- 「顯示格線」→ 勾選「主格線」



ii. 設定格線的間距

- 在繪圖區上按滑鼠右鍵
- 點選「繪圖區」
- 到「格線」頁 → 「格線類型」→ 選擇「主格線」
- 勾選「間距」
- 設定  $x = 1$  和  $y = 1$

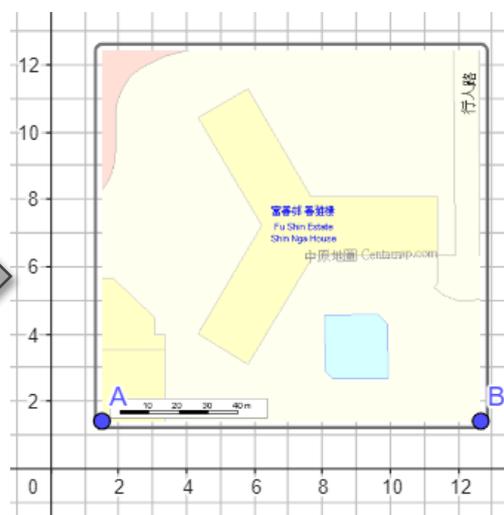
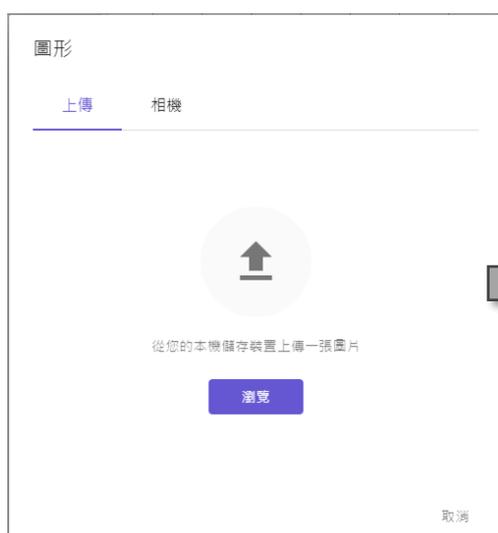


備註：

這將有助於定義你 3D 模型的比例。

iii. 匯入建築物的地圖

- 使用「插入圖片」工具，從檔案中指定要插入的圖片
- 到「上傳」頁 → 「瀏覽」
- 上傳地圖



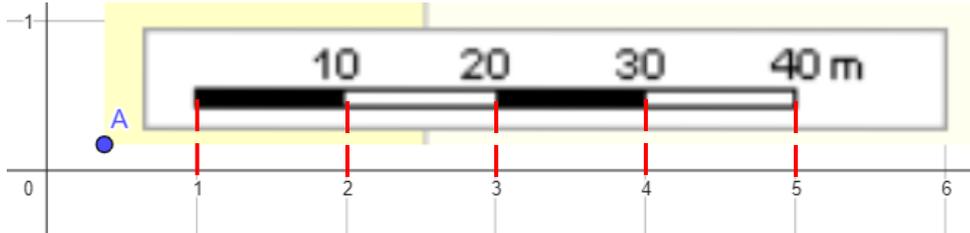
**步驟 描述**

- iv. 調整地圖的大小
- 移動點 A 和 B，以調整地圖的大小
  - 隱藏點 A 和 B

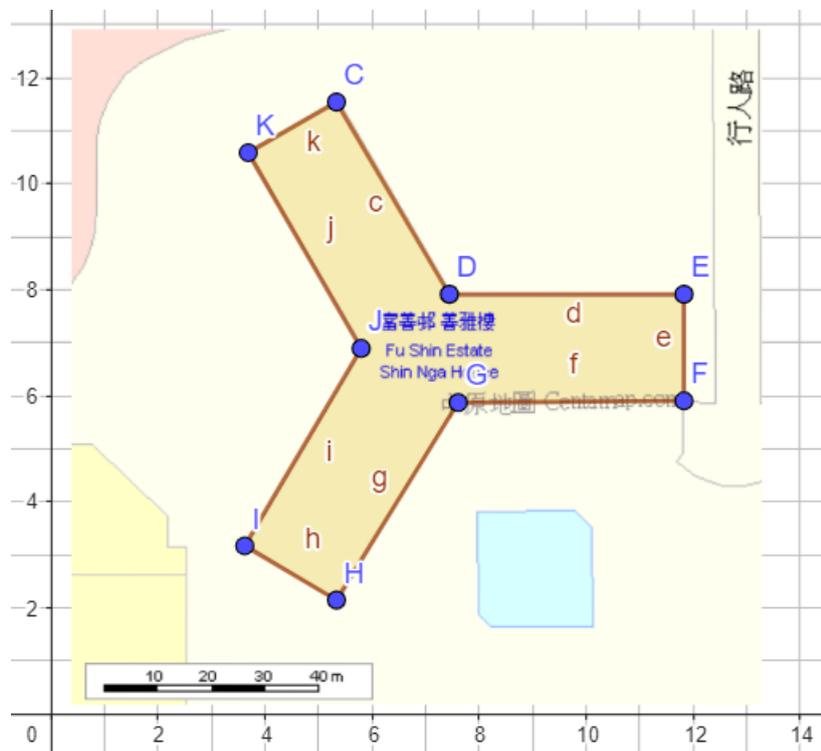
點	
A = (0.38, 0.18)	
B = (13.28, 0.17)	

備註：

如果格線的間距與地圖的比例匹配，創建 3D 模型時則更容易確保比例正確。



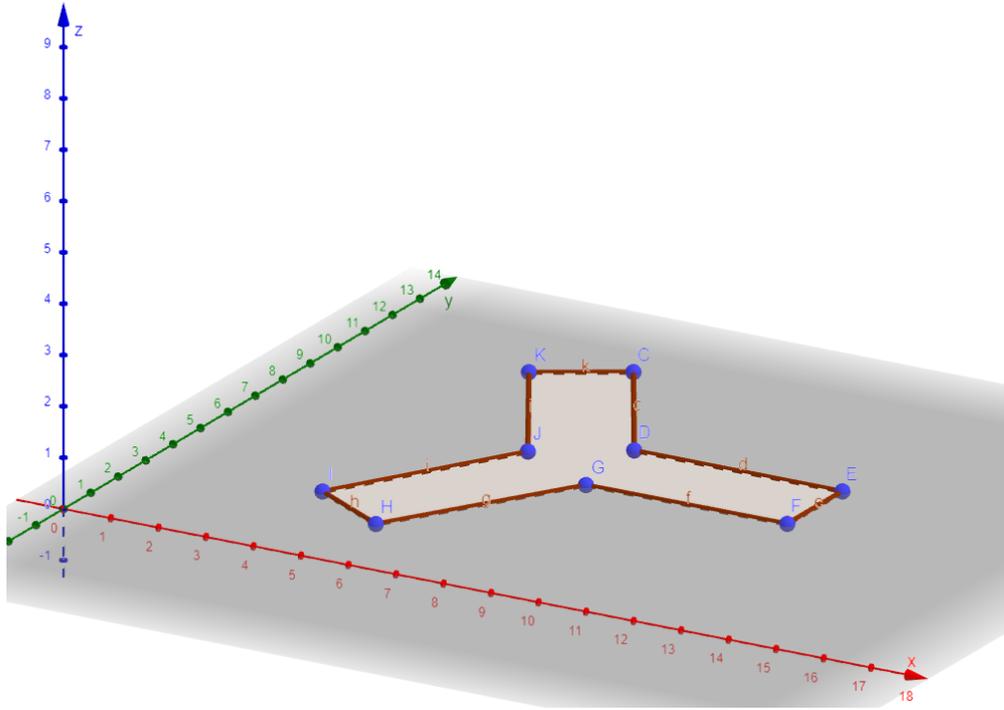
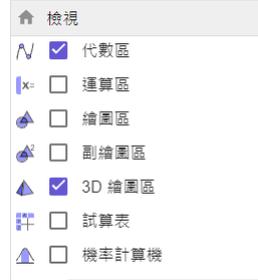
- v. 繪畫建築物的底
- 使用「新點」工具繪畫建築物的角
  - 使用「多邊形」工具連接所有角，以繪畫建築物的底



步驟 描述

vi. 顯示 3D 繪圖區

- 「主目錄」(右上角) → 「檢視」
- 勾選「3D 繪圖區」
- 取消勾選「繪圖區」
- 調整視域



提示

要調整 3D 繪圖區的視域

- 使用「移動繪圖區」工具
- 首先，你可以把它垂直移動
- 點擊一下後，你可以把它水平移動
- 右下角有一些有用的按鈕



標準比例：返回初始位置和視域



放大



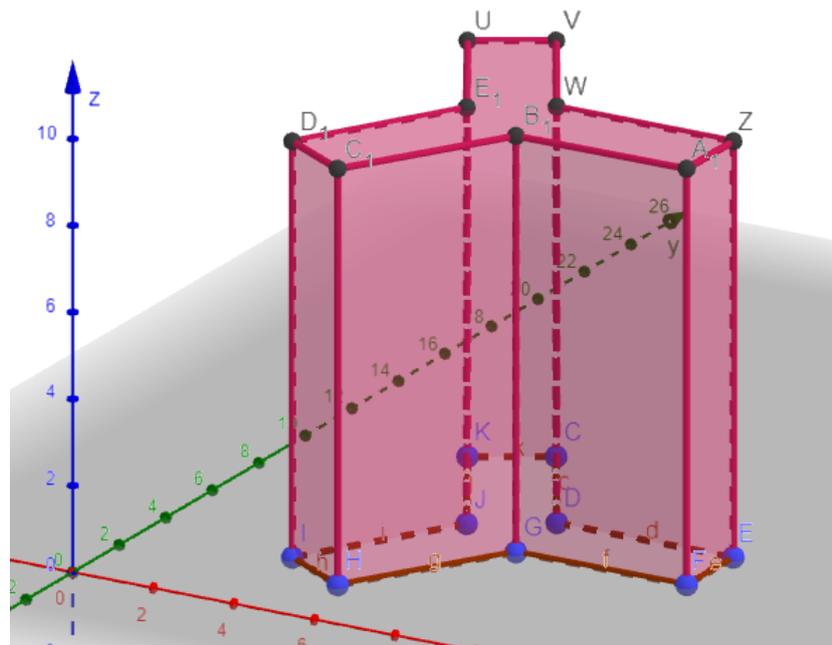
縮小

步驟 描述

vii. 創造建築物

(以 96 m 高的建築物為例，根據地圖的比例，我們需要輸入 9.6)

- 使用「拉成柱體」工具，點選建築物的底
- 輸入 9.6 作為它的高度



4. 這個 3D 模型有什麼假設？

1. 建築物形狀：建築物是一個角柱體，在整個高度上具有均勻橫切面。
2. 建築物頂部：建築物的屋頂或最頂層是完全平坦的。