

SCHOOL MATHEMATICS NEWSLETTER

ISBN 978-988-8581-25-2



9 789888 581252 >

Published by
Mathematics Education Section, Curriculum Support Division,
Education Bureau, Government of the Hong Kong Special Administrative Region.
香港特別行政區政府教育廳課程支援分部數學教育組出版

政府物流服務署印

學校數學通訊

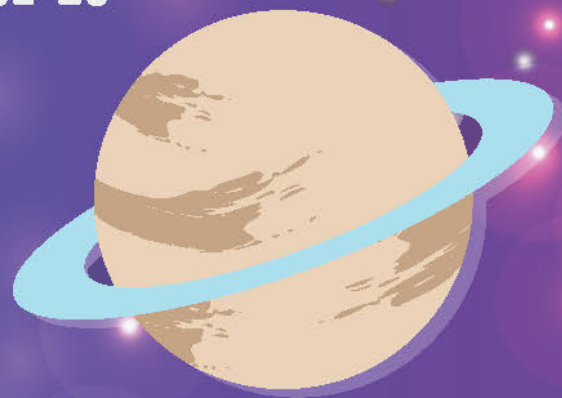
第二十八期

教育局

SMN

SCHOOL MATHEMATICS NEWSLETTER

ISSUE 28



版權

©2025 本書版權屬香港特別行政區政府教育局所有。本書任何部分之文字及圖片等，如未獲版權持有人之書面同意，不得用任何方式抄襲、節錄或翻印作商業用途，亦不得以任何方式透過互聯網發放。

ISBN 978-988-8581-25-2

Foreword

Welcome to the 28th issue of the School Mathematics Newsletter (SMN).

The School Mathematics Newsletter (SMN) is designed for mathematics teachers and serves as a vital communication channel regarding mathematics education in Hong Kong. This issue features a diverse range of articles contributed by academics, curriculum officers, and teachers, covering various topics. These include effective strategies for teaching and learning mathematical modelling, insightful perspectives on the beauty of mathematics, advancements in computational mathematics education, explorations of geometry and the history of mathematics, and engaging activities related to STEAM education.

In today's educational landscape, mathematics teachers face the significant challenge of addressing the varying abilities, motivations, and aspirations of their students. To navigate this complexity, it is essential for mathematics educators to equip themselves with the necessary mathematical skills and teaching strategies tailored to different learning environments. We hope

that all readers will find the content of this issue both informative and inspiring.

The Editorial Board of SMN would like to extend its heartfelt gratitude to all contributors and to our colleagues in the Mathematics Education Section, whose dedicated efforts have made the publication of SMN Issue 28 possible.

SMN provides an open forum for mathematics teachers and professionals to share their insights into mathematics learning and teaching. We welcome contributions as articles that explore all facets of mathematics education. However, please note that the views expressed in the articles do not necessarily reflect those of the Education Bureau. For all correspondence, please contact:

The Editor, School Mathematics Newsletter,
Mathematics Education Section
Curriculum Support Division
Room 403, Kowloon Government Offices
405 Nathan Road
Yau Ma Tei, Kowloon
email: math@edb.gov.hk

目錄

1. **數學的生命力：能力、動力、活力**
羅浩源..... 7
2. **A Scenic Excursion in Geometric Wonderland – On Ratio of Area**
CHOI Wai-Fung, Brian, SIU Man-keung21
3. **摺出數學世界：簡單的摺紙教學例子**
羅永昌..... 61
4. **滄海遺珠**
鄭仕文、程國基.....79
5. **設計初中數學建模活動的經驗分享**
鍾永康、楊俊賢.....101
6. **探討小學二年級「四邊形」的學與教**
廖文慧.....116

7. 談談先乘除後加減
劉國賢..... 129
8. 課堂活動：自製計算尺
馮德華..... 138
9. 中國數學史與數學教學
李志堅、姚泳楹、司徒寶美..... 149

數學的生命力：能力、動力、活力

羅浩源

香港中文大學課程與教學學系

引言

數學是一個必修必考的學科，背後簡單的一個原因 – 數學真的好「重要」(vital)！而數學的「活力」(vital-ity)構成「生命力」(life-force)要素，正好是反映出數學本身的重要性。數學的重要性，不是來自某一個專家、或某一個擁有權力的人的看法和倡導，而是源自人類經歷長年累月的心智思維活動所建立起來的價值觀。在缺少數學歷史認知元素的課程框架下，數學的價值受到競爭文化的扭曲，演變成以考試成績作為攀爬更高「學術階梯」(academic ladder)的對換卷。然而，數學固有的價值，需由學習者從個人生活的旅程中，去體驗、去解讀、再去確認這種價值。在確認過程中，我們作為學習者會提出一個值得反思的問題：「究竟通過學習這學科 – 數學，會為我的人生帶來怎麼樣的意義？」。在成長階段，對於每一個能有機會接受 15 年（3 年幼兒 + 6 年小學 + 6 年中學）基礎教育的人來說，學校的活動無疑是生活體驗中的重要部份。因此，作為教師，我們有一個「道德責任」(ethical responsibility) (Law, 2024)，將「學習數學要有意義」的價值觀融入課堂實踐，好讓學生

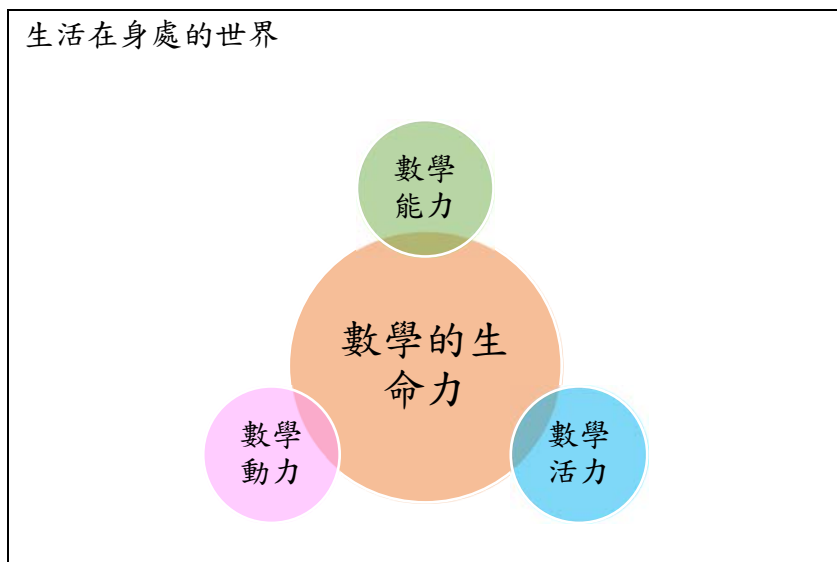
親自體會到學習的意義：不單是在數學課堂的過程上、更是在他們往後的生命旅程中。

以有意義的學習去孕育數學的生命力

數學經歷多個世紀的發展，成為今日以符號作為概念上的表達、邏輯上的推理、以至證明上的闡述所需的一個學科。符號的創造，突破了人類直覺思維上的局限，拓展了想像空間上的表達，發展成一個獨特的語言體系。數學的抽象本質，正是來自符號上的理解和運用。符號理解上的困難，會引致學習上的障礙。從具體到抽象，是一個學習的過程。「怎樣的數學學習才會在過程中產生意義？」這應是我們心中很想問的一個問題。

也許，我們更需要問：「什麼是數學的意義？不同人是否有著不一樣的解讀？」。不同人當然會從各自不同的學習經歷的詮釋中，產生不一樣的數學「意義」。日常語言中用作表達的詞彙，查閱字典便可得到它的基本解釋；但我們卻需從生活中通過實際溝通上的運用，才可真實地領悟到其箇中的「意義」。以符號作為表達工具的數學，是否也需要通過生活經驗來領悟其「意義」？要使到數學的學習有意義，便須讓學生從生活中體驗到數學的生命力。這種生命力的體驗，包含著學習數學所需的三個要素－能力、動力和活力（見

圖一)。在課堂上的教與學，聚焦於學生在數學能力的提升、通過傳統的考核方法去檢視他們的表現。數學「能力」存在著的差異，令能力稍遜的學生缺乏「動力」參與課堂活動，更會令課堂的生態失去了學習應有的「活力」。



(圖一)：從生活中體驗數學的生命力

學習數學的「活力」來自哪裏？學習的活力，正是從學生的生活而來的。學習是每一個人與生俱來的本能。學習的本能，讓我們通過觀察、辨識、和認知上的重組來認識身處的世界 (world)。學習涉及「大腦-身體-世界」(brain-body-world) 的互動連繫 (Clark, 1997)。從生活 (world) 而來

的認知，讓我們更有意欲把腦海中（brain）浮現的估計（prediction）以身體（body）的行動去測試其準確性。因此，通過教師適切的課堂任務設計，能有效地令學生從互動對話的活動經驗中，學會了怎樣減少可能出現的預測誤差（Clark, 2015）。在設計「數學有意義」的任務時，教師可以運用以下三個元素來規劃課堂活動：

1. 連繫日常生活經驗：教師可以將數學概念與學生的日常生活經驗相連結，以增加學生對數學的興趣和認同感。透過引入真實世界的情境和問題，將數學與學生的日常生活密切結合起來，讓他們能夠看到數學在他們生活中的應用價值。
2. 設計能夠讓學生動手操作的活動：學生通過實際操作，會更容易理解和記憶數學概念。因此，教師可以設計讓學生參與互動的活動，例如遊戲、實地觀察、實驗或使用數學工具（包括利用繪圖工具畫出有條件規限的幾何圖形）等。這些活動可以讓學生親身體驗數學概念，進行實際操作和探索，從而提高他們的數學理解和應用能力。
3. 鼓勵學生進行互動對話：互動對話是促進學生間思想交流和合作學習的關鍵。教師可以提供開放性的問題，鼓勵學生進行思考和討論，分享不同的解決方法和觀點。透過學生之間的互動對話，他們可以相互學習、挑戰思

維的局限、發現彼此理解上的錯誤並重新建立對數學學習的自信與堅持。教師可以擔任引導者的角色，促進對話的進行，確保每個學生都有參與的機會，並激發他們對學習的積極性。

透過將這三個元素融入課堂活動的設計中，教師可以幫助學生建立起數學與現實生活的聯繫，提供實際操作的機會，並促進他們之間的互動對話，從而培養出更深刻且有意義的數學學習經驗。

讓「數學有意義」的價值觀融入課堂實踐

去年夏天，我開展了「MATHS VIA」（Mathematics Value Into Action）計劃¹，旨在增強教師的專業能力，設計數學任務，使數學對學童具有意義。其中一間參與計劃的學校教師，設計了實地考察活動，帶小學三年級學生親身步行將軍澳跨灣大橋，讓學生感受一公里的路程有多長。通過這個設計，教師運用了上述的三個元素來展示數學的生命力，讓學童親自以身體觸感一公里的意義。

¹ 對該計劃有興趣的讀者，可瀏覽 YouTube「有關數學教育的研究計劃：

MATHS VIA | Research in Mathematics Education: MATHS VIA」。網址：

https://youtu.be/9cH5oWXkPmo?si=1T9C_nNpMqewZcio

在中學數學課堂上，教師可多花一點心思、通過多元化的活動設計，去拓展對話空間。數學課堂應重視數學對話，教師可利用對話去引發、去辯證、去歸納學生在腦海裏所思考的東西；而不是讓他們只跟隨教師所講解的示例，進行重覆的練習。要提升對話的質素，教師可鼓勵學生一起從多方面搜羅材料，讓後者覺得對話有意義、並產生積極參與對話的意欲。對話內容的資料，可以來自師生各自在生活中的經歷、書本或網上的閱讀（閱讀也可以是生活的體驗）而產生的問題和想像。

Stenlund (2014) 在《符號數學的起源與數量科學的終結》一書中，強調了符號在現代數學的重要角色。通過閱讀該書，我們不但能理解作者怎樣區分古希臘數學的遺產 (heritage) 和現代數學歷史 (history) 之間的關連，亦可從他在辯證中所用的例子，與學生進行對話（圖二），好讓他們體會到數學的生命力。

對話活動（一）：以幾何形式可否理解到以下方程式中的代數內容？（頁 20）

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

對話活動（二）：讓我們考慮以下方程式，你是否同意這方程式的真實性？若不用指數表示，你能否完整地在紙上把這個方程式寫下來？（頁 71）

$$10^{40} \times 10^{30} = 10^{70}$$

對話活動（三）：以下的命題（proposition）乃用現代符號來表示（頁 31-32）

$$\left(\sum_1^n i\right)^2 = n^3 + \left(\sum_1^{n-1} i\right)^2$$

你可否用三種不同的表達方式去解讀這個命題？

1. 以文字或口述說出它的意思
2. 以具體整數為例解讀數列的含意
3. 以幾何形狀作為類比來解讀它的含意

對話活動（四）：讓我們考慮以下兩句子，你怎樣理解這兩句子的異同之處？（頁 61；Diamond, 1976）

「一個人有兩隻眼睛」

「一個二次方程有兩個根」

（圖二）：數學對話

數學在 21 世紀的生命力

廿一世紀快將完成四分一的歷程，人工智能 (AI) 急速的發展，正挑戰著人類的智慧，看我們怎樣裝備自己、迎接不確定的未來。任何的科技 (包括 AI) 發展，離不開背後的數學。作為教師，我們需要超越課程框架，在數學課堂上為學生提供發展更遼闊的跨學科思維 (STEM/ STEAM 是其中一種跨學科的學習) 的空間。AI 在數學教育的角色是甚麼？怎樣使用它成為教與學有用的工具？作為一個工具，除了利於教師用來出卷評核學生的表現外，是否也需要思考如何利用它去幫助學生拓展想像和對話的能力，從而進行深度學習 (deep learning) ？

人類是喜歡分享故事的動物。讓我和你分享一個故事，在這個故事中，R.B. Bing 是一位數學家，他和一班數學家正出席完一個數學會議：

這是一個黑暗而風雨交加的夜晚。濃霧籠罩著整個麥迪遜機場。R.B. Bing 自願開車將一些被困的數學家送到芝加哥。冰雨猛烈地擊打著擋風玻璃，道路上結冰了，而 Bing 一邊開車一邊還專注地解釋著一個數學定理。很快，擋風玻璃因為他充滿活力的解釋而起起了霧。乘客們的眉頭緊皺，還冒著出於恐懼的汗水。隨著數學描述

變得更加清晰，擋風玻璃的能見度卻變得更加模糊。最後，在 Bing 伸手向前的時候，他們有了一絲生存的希望，因為看到他似乎要擦拭擋風玻璃上的水氣。然而，他們的希望變成了恐懼，因為 Bing 實際上是用手指在霧氣朦朧的窗玻璃上畫出圖形，並繼續他的證明，為了展示和說明，他還加上了箭頭和有幫助的標籤。

（原文為英文，見 Starbird, 1998, 頁 453）

這個故事幽默地展示了一位數學家對於數學的熱情和專注，即使在極端的情況下，他仍然無法停止對數學的探索和解釋。但從人性的角度，我們又會怎樣解讀這個故事？在 21 世紀，我們需要發展學生的數學「能力」，也同時了解到「動力」和「活力」在提升他們數學「能力」上的重要性。但作為教師，我們又應怎樣引領學生進一步反思「數學生命力」背後「生命」的意義？

我利用這個故事與 AI 進行對話。在提出了 2 個問題後，我得到它（GPT-3.5-Turbo）的回應：

羅：讓我和你分享一個故事，然後請你回答 2 個問題：

1. 從這個故事怎樣看到數學的生命力？
2. 假若你是車上的其中一個乘客，你會有什麼反應？

AI： 這個故事展示了數學在逆境中的生命力和影響力。儘管乘客們面臨著黑暗、風雨和糟糕的能見度，但 R.B. Bing 作為一位數學家，依然保持著專注和冷靜，並將數學帶入這個緊急的情境中。從故事中可以看到，儘管環境極其惡劣，但數學成為了乘客們唯一的希望和引導。Bing 的解釋和證明，雖然在擋風玻璃上畫出的圖形被霧氣模糊了，但他能夠透過這些圖形和標籤來傳達數學的思想。這種能力讓乘客們看到一絲希望，因為他們知道 Bing 正努力解決一個問題，可能有助於找到一個出路。這個故事強調了數學的普遍性和抽象性。即使在極端的情況下，當其他方式和手段無法使用時，數學仍然可以提供結構和邏輯，幫助我們理解和解決問題。它不受環境的限制，能夠在混亂和不確定性中提供指引和方向。作為車上的其中一個乘客，我可能會感到驚訝和敬佩。儘管面臨極端的天氣和困難的路況，Bing 作為一位數學家能夠保持冷靜並專注於解釋數學定理。我可能會感到驚訝於數學在這樣的緊急情況下的生命力和重要性。同時，我也會對 Bing 的專注和奉獻精神感到敬佩，他不僅在自己的研究中努力，而且願意用自己的知識來幫助他人。在這樣的情境下，我可能會試圖與其他乘客合作，共同應對困境。我可能會鼓勵他們相信 Bing 的能力和數學的力量，並提醒他們保持冷靜，專注於解決問題。我也可能會試著理解 Bing 解釋的數學概念，並看看是否能夠從中獲得一些有用的見解或解

決方案。最重要的是，我會保持希望和積極的態度，相信數學能夠幫助我們克服困難並找到出路。

我和我的一位好朋友（他本身是一位數學家）分享了 Bing 的故事、及 AI 的回應。以下是我們通過電郵的「對話」：

「閱讀這個我和 AI 的對話後，你有何感想？試想像，若 Bing 駕駛的是一輛自動導航的車，這個故事會自動失去了原有的味道和意義（AI 未必能理解到）。你有沒想過，假若作為一個有血有肉、有感覺的人，同時也是車上的其中一個乘客，你會有什麼反應？如果車上的是 AI，AI 又會怎樣反應？它的反應與你的反應分別在哪裏？」

「當我閱讀關於 R.B. Bing 的故事時，作為一位數學家，我能感受到他對這個學科的熱情，並在某種程度上也能理解他對數學詮釋的專注度。但老實說，在那種情況下，當車廂坐著幾位同事，他們的安全正取決於我對路面的注意力時，我不會如此沉浸在我的研究中。從某種意義上說，這不是一個人應該有的行為。數學的崇高性，還可以在其他類似的故事中展示，同樣的熾熱和激情，但卻不那麼「危險」。你對自動駕駛汽車的問題讓人深思。如果在那種情況下，我是乘客，

當知道我的安全取決於一台機器時，這感覺並不舒適，即使我知道人也會犯錯誤。」

作為讀者，在閱讀過這些對話後，你又會有甚麼感想呢？

結語

數學的生命力需要富意義的數學學習生態和環境來孕育、來展現，來拓展。在 Leopold 的《在關乎賦予生命的數學中：將活力置於中心》一文中，作者不以傳統方式進行實踐數學教育的目標，卻著眼於激發教育的活力作為任務。我引用文章中以下的節錄為結語，讓我們反思怎樣通過富意義的數學課堂、使學生體驗數學的生命力。

「數學能力只是人類能力的一個方面，...，我們對整體性的探索很感興趣；我們主張所有技能領域都值得探索，不僅僅是數量素養的範疇。...，學習是跨學科的，以技能為基礎的整體性，這可能會對習慣了傳統教育及其可預測結構的人造成一些焦慮。如果教育是將核心價值觀、技能和知識傳承給年輕一代的途徑，（我們應該）以一種有益於再生、有生命力的文化願景來實現這一目標。簡而言之，我們致力於帶給我們活力的教育，激發我們的靈感 ...」。 (Leopold, 2022, 頁 2)

參考文獻

- [1] Clark, A. (1997). *Being there: Putting brain, body and mind together again*. Cambridge, MA, London: MIT Press.
- [2] Clark, A. (2015). *Embodied Prediction*. In T. Metzinger & J. M. Windt (Eds). *Open MIND: 7(T)*. Frankfurt am Main: MIND Group. doi: 10.15502/9783958570115
- [3] Diamond, C. (1976) (Ed.), *Wittgenstein's lectures on the foundations of mathematics*. Chicago and London: The University of Chicago Press.
- [4] Law, H. Y. (2024). *Values into Pedagogical Practices in Mathematics: Promoting Prospective Teachers' Ethical Responsibility for Making Mathematics Meaningful*. In *Values and Valuing in Mathematics Education: Moving Forward into Practice (pp. 73-97)*. Singapore: Springer Nature Singapore.
- [5] Leopold, H. (2022). *In the Interest of Life-Giving Mathematics: Putting Vitality at the Center*. *Journal for*

Theoretical & Marginal Mathematics Education, 1(1), 0104.

- [6] Starbird, M. (1998). *R.H. Bing's Human and Mathematical Vitality* (pp. 453-466). In: Aull, C.E., Lowen, R. (Eds) *Handbook of the History of General Topology. History of Topology, vol 2*. Springer, Dordrecht.
https://doi.org/10.1007/978-94-017-1756-4_4
- [7] Stenlund, S. (2014). *The origin of symbolic mathematics and the end of the science of quantity*. Department of Philosophy, Uppsala University.

作者電郵：

hylaw@cuhk.edu.hk

**A Scenic Excursion in Geometric Wonderland —
On Ratio of Area**

CHOI Wai-fung, Brian
A Mathematics Enthusiast
SIU Man-keung
University of Hong Kong

*"[M]athematicians like to pretend that they can't even add,
but most of them can when they have to."*

Michael Spivak, Calculus, 1967, p. 157.

Preamble

A teacher usually encourages students to attempt finding different solutions to a single problem to better understand the problem. The following is an instance of this, when one of the authors gave his class a geometric problem on an equilateral triangle lying within a larger equilateral triangle. Methods using different mathematical tools can be applied. Starting with this single problem, both authors worked together to study further more related problems and came up with two well-known theorems in geometry. This is a record of their scenic excursion in the Geometric Wonderland.

Another good habit is to attempt investigating a general, or sometimes a special, situation of the original problem. A method may be extended to solve a more general situation and even lead to unexpected results. What follows is an instance of this, when the other author tried to look at the original problem in the general situation. As a bonus, a famous theorem discovered by the Italian mathematician Giovanni Ceva (1647-1734) in 1678 spins off as a special case. A natural follow-up is a similar proof of its dual result, another famous theorem announced by the ancient Greek mathematician Menelaus of Alexandria (c. 70-140 C.E.) in the first century C.E..

There is yet one more lesson to learn, that tedious computation may pay off in the end. It is true that mathematicians tend to strive for elegance and simplicity, but sometimes one should not shy away from seemingly laborious working. When the other author encountered the general problem, a straight-forward way is to go ahead with a similar calculation, which promises to be more complicated and tedious. Yet, as a retired teacher, he has all the time to waste! (Moreover, as a low-tech chap he does not have sufficient skill with a symbolic computation software to aid him but to resort to good old pen-and-paper.) It paid off handsomely in the end! What makes it more interesting is that the author, who gave the original problem to his class, was also

inspired by the seemingly tedious algebraic manipulation. Eventually, Menelaus' Theorem, a dual result of Ceva's Theorem, was also obtained as a special case in a likewise manner. The proofs of both theorems are further polished so that the computation is presented succinctly, that is streamlined after we better understand the working through the initial seemingly tedious manipulation, thus completing a fascinating picture.

I. The Original In-class Example

Everything starts with the preparation for a Form 2 lesson more than a decade ago. There was an interesting question about the application of ratio in geometry found in a textbook.

Question 1

D , E and F are points on BC , CA and AB respectively of an equilateral $\triangle ABC$ such that $BD:DC = CE:EA = AF:FB = 1:2$. Construct AD , BE and CF , which intersect at the points P , Q and R . If the area of $\triangle ABC$ is 1, find the area of $\triangle PQR$. (See Figure 1.)

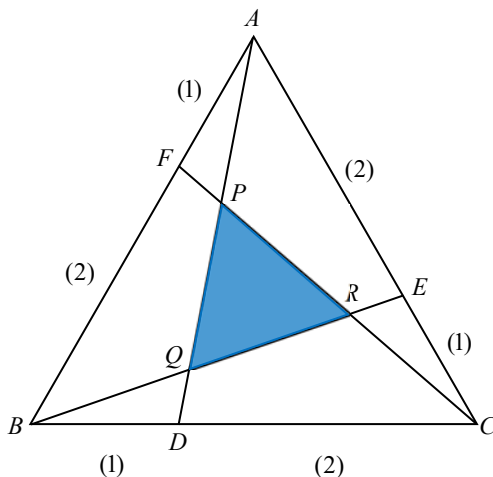


Figure 1

Solution

The problem-solving strategy is to apply repeatedly the following principle: "The area ratio of 2 triangles with the same height is equal to the base ratio." Complemented by the idea of rotational symmetry and a nice construction of an auxiliary straight line, the algebraic calculation is elementary while the geometric aspect is intriguing. Throughout this account, we denote the area of a triangle, say $\triangle ABC$ as $[\triangle ABC]$, etc. Note that numbers involved in the ratio a line segment is divided are put in brackets in figures to emphasise that these numbers indicate the ratio rather than the actual lengths.

Let $[\Delta AFP] = x$, $[BQPF] = y$ and $[\Delta PQR] = z$.

(See Figure 2.)

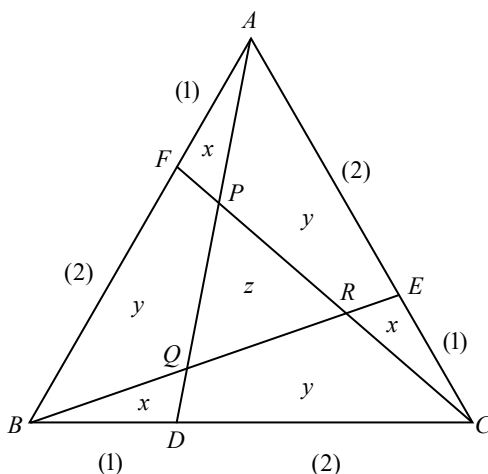


Figure 2

Since ΔABC is equilateral, by rotational symmetry we have

$$[\Delta BDQ] = [\Delta CER] = [\Delta AFP] = x \quad \text{and}$$

$$[\Delta CRQD] = [\Delta APRE] = [\Delta BQPF] = y.$$

Since ΔABD and ΔACD share the same height, we conclude that

$$\frac{[\Delta ABD]}{[\Delta ACD]} = \frac{BD}{CD} = \frac{1}{2},$$

so that $\frac{2x+y}{x+2y+z} = \frac{1}{2}$,

or $z = 3x$ after simplification.

Construct CQ . (See Figure 3.)

Since $\triangle BDQ$ and $\triangle CDQ$ share the same height, we conclude that

$$\frac{[\triangle BDQ]}{[\triangle CDQ]} = \frac{BD}{CD} = \frac{1}{2},$$

so that $[\triangle CDQ] = 2x$, and $[\triangle CRQ] = y - 2x$.

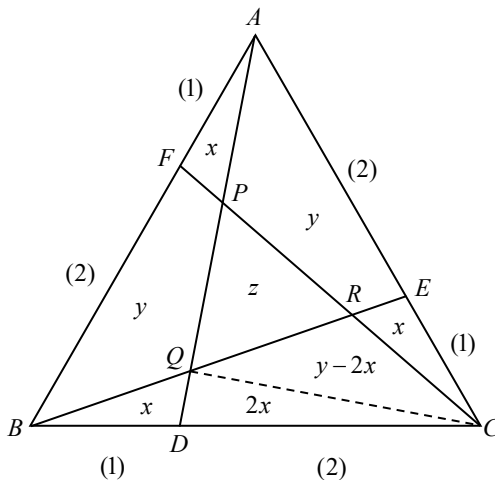


Figure 3

Since $\triangle CEQ$ and $\triangle AEQ$ share the same height, we conclude that

$$\frac{[\triangle CEQ]}{[\triangle AEQ]} = \frac{CE}{AE} = \frac{1}{2},$$

so that $\frac{(y-2x)+x}{y+3x} = \frac{1}{2}$,

or $y = 5x$ after simplification.

But $1 = [\triangle ABC] = 3x + 3y + z$,

hence $3x + 3(5x) + 3x = 1$,

or $x = \frac{1}{21}$.

Hence, $[\triangle PQR] = z = 3x = \frac{1}{7}$.

II. Extension of the In-class Example

The previous question of "given the side ratio, find the area ratio" inspires a somewhat "converse" version of the problem. Given the ratio of the areas of the inner and outer triangles, find the side ratio.

Question 2

D , E and F are points on BC , CA and AB respectively of an equilateral $\triangle ABC$ such that $BD:DC = CE:EA = AF:FB = 1:k$. Construct AD , BE and CF , which intersect at the points P , Q and R . If the area of $\triangle ABC$ is twice the area of $\triangle PQR$, find the value of k . (See Figure 4.)

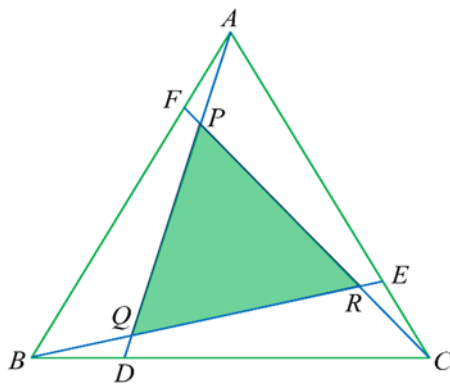


Figure 4

Solution

Given that $[\triangle ABC] = 2[\triangle PQR]$, we have

$$3x + 3y + z = 2z,$$

so $z = 3x + 3y$. (See Figure 5.)

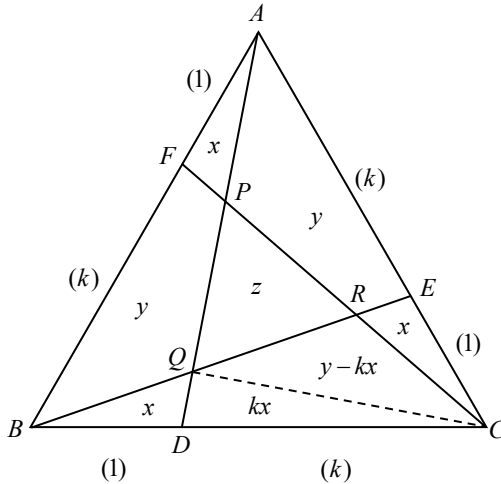


Figure 6

Since $\triangle BDQ$ and $\triangle CDQ$ share the same height, we conclude that

$$\frac{[\triangle BDQ]}{[\triangle CDQ]} = \frac{BD}{CD} = \frac{1}{k},$$

so that $[\triangle CDQ] = kx$, and $[\triangle CRQ] = y - kx$.

Since $\triangle CEQ$ and $\triangle AEQ$ share the same height, we conclude

$$\text{that } \frac{(y - kx) + x}{y + (3x + 3y)} = \frac{[\triangle CEQ]}{[\triangle AEQ]} = \frac{CE}{AE} = \frac{1}{k},$$

so that $ky + (k - k^2)x = 3x + 4y$,

or $(k - 4)y = (k^2 - k + 3)x \dots (2)$.

Dividing (2) by (1), we obtain

$$\frac{k-4}{5-k} = \frac{k^2-k+3}{2k-4},$$

so that $(k-4)(2k-4) = (5-k)(k^2-k+3)$.

After simplifying, we finally obtain

$$(k+1)(k^2-5k+1) = 0.$$

Hence, $k^2-5k+1=0$ or $k=-1$, which is to be rejected.

$$\text{Thus, } k = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}.$$

It is noteworthy that the two values of k are reciprocal to each other. They refer to the two situations exhibiting reflectional symmetry as shown in Figure 7.

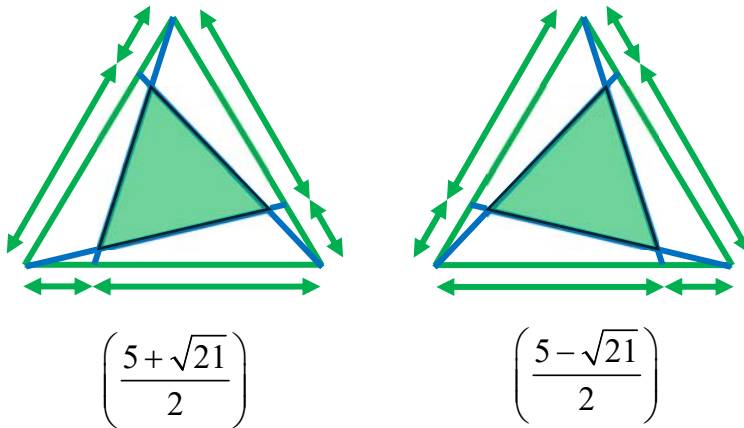


Figure 7

The crux lies in the equality of the two ratios $1:k = \frac{1}{k}:1$.

III. General Treatment of Equilateral Triangles

It is natural to consider removing the limitations imposed on Question 1 and Question 2, namely (i) requiring $\triangle ABC$ to be equilateral, (ii) requiring the sides to be divided in the same ratio. Before delving into the most general setting, let us warm up by proving a preliminary result for an equilateral triangle, with its sides divided in the same ratio. From now on, denote $[\triangle ABC] = \Delta$.

Lemma

Let $BD:DC = CE:EA = 1:k$, $[\Delta ABQ] = u$, $[\Delta QBD] = x$
and $[\Delta QCE] = t$. Then

$$x = \frac{\Delta}{(1+k)(1+k+k^2)} . \quad (\text{See Figure 8.})$$

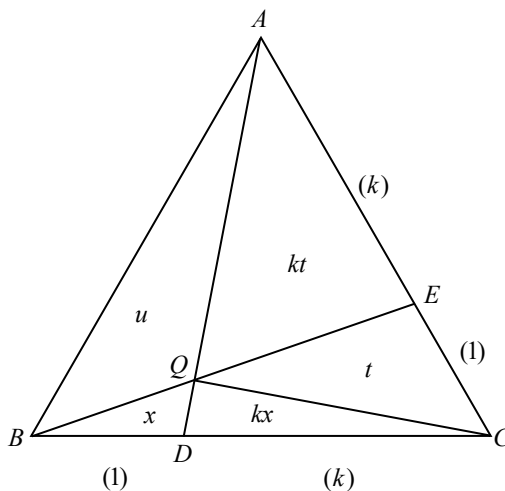


Figure 8

Proof

$$\frac{x+u}{kx+t+kt} = \frac{[\Delta ABD]}{[\Delta ACD]} = \frac{1}{k}, \text{ therefore } kx+ku = kx+t+kt,$$

$$\text{or } ku = (1+k)t \dots (3).$$

$$\frac{x+kx+t}{u+kt} = \frac{[\Delta BCE]}{[\Delta BAE]} = \frac{1}{k}, \text{ therefore } k(x+kx)+kt = u+kt,$$

$$\text{or } u = k(1+k)x \dots (4).$$

By eliminating u , we obtain

$$k = \frac{t}{kx}, \text{ so } t = k^2x \dots (5).$$

By (4) and (5), we have

$$\begin{aligned} \Delta &= (x+kx) + (t+kt) + u \\ &= (1+k)x + (1+k)k^2x + k(1+k)x \\ &= (1+k)(1+k+k^2)x \end{aligned}$$

$$\text{Hence, } x = \frac{\Delta}{(1+k)(1+k+k^2)} \dots (6).$$

Theorem

Let $AF : FB = BD : DC = CE : EA = 1 : k$. AD and BE intersect at Q ; BE and CF intersect at R ; CF and AD intersect at P .

Then $[\Delta PQR] = \frac{(1-k^2)\Delta}{1+k+k^2}$. (See Figure 9.)

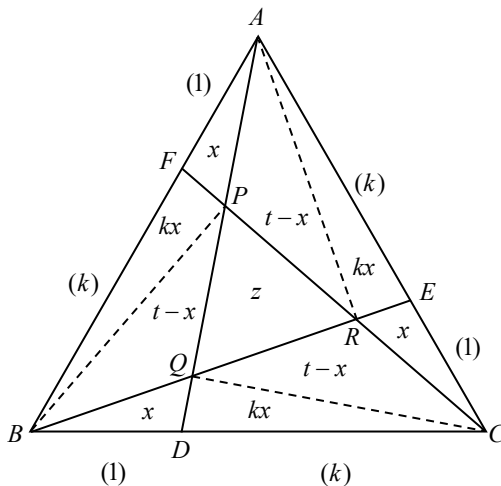


Figure 9

Proof

Construct BP , CQ and AR . Denote the areas of triangles as shown in the figure.

By the Lemma, we have $\Delta = (1+k)(1+k+k^2)x$.

But $\Delta = z + 3(1+k)x + 3(t-x)$
 $= z + 3k(1+k)x$, by substituting in t as shown in (5).

By equating Δ we have

$$(1+k)(1+k+k^2)x = z + 3k(1+k)x.$$

$$\text{Hence, } z = (1+k)(1-2k+k^2)x = (1+k)(1-k)^2x$$

$$= (1+k)(1-k)^2 \cdot \frac{\Delta}{(1+k)(1+k+k^2)} \text{ by the Lemma}$$

$$= \frac{(1-k)^2 \Delta}{(1+k+k^2)} \dots\dots(7).$$

$$\text{Also, } t-x = (k^2-1)x = \frac{(k^2-1)\Delta}{(1+k)(1+k+k^2)} = \frac{(k-1)\Delta}{1+k+k^2}.$$

Remark (1)

In particular, when $k=2$ (trisection points),

$$z = \frac{\Delta}{7}, \quad x = \frac{\Delta}{21}, \quad t-x = \frac{\Delta}{7}.$$

$$AP : PQ : QD = [\Delta BAP] : [\Delta BPQ] : [\Delta BQD]$$

$$= (1+k)x : (t-x) : x$$

$$= \frac{\Delta}{7} : \frac{\Delta}{7} : \frac{\Delta}{21}$$

$$= 3 : 3 : 1.$$

Thus, in this special case, we have $AP = PQ$.

Remark (2)

$z = 0$ if and only if $k = 1$, that is AD, BE and CF are medians. This is a rather round-about way to establish the fact that the three medians of a triangle are concurrent!

IV. General Treatment of Arbitrary Triangles

Now we will carry out the same computation to an arbitrary triangle with general k_1, k_2 and k_3 . Denote the ratios and the areas of triangles as shown in the figure. (See Figure 10.)

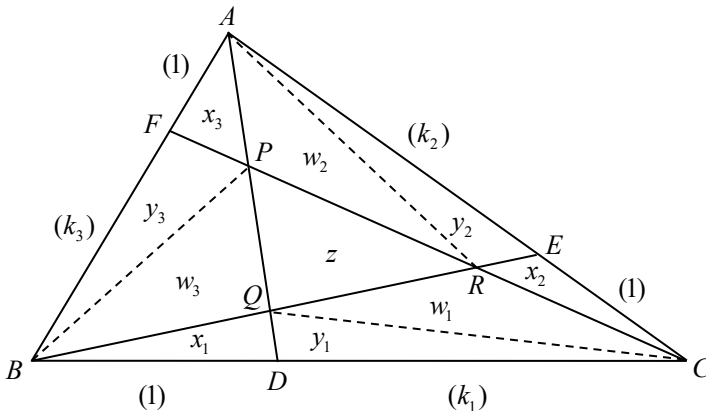


Figure 10

One method we will frequently adopt is to permute the subscripts cyclically, $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$.

Note that $y_1 = k_1x_1$, $y_2 = k_2x_2$, $y_3 = k_3x_3$.

Let $u = x_3 + y_3 + w_3$, $t = w_1 + x_2$.

(For the notations u and t , see Figure 8 in Section III.)

$$\frac{x_1 + u}{k_1x_1 + t + k_2t} = \frac{[\Delta ABD]}{[\Delta ACD]} = \frac{1}{k_1},$$

so that $k_1x_1 + k_1u = k_1x_1 + t + k_2t$,

or $k_1u = (1 + k_2)t$(8).

$$\frac{x_1 + k_1x_1 + t}{u + k_2t} = \frac{[\Delta BCE]}{[\Delta BAE]} = \frac{1}{k_2},$$

so that $k_2(1 + k_1)x_1 + k_2t = u + k_2t$,

or $u = k_2(1 + k_1)x_1$(9).

Divide (8) by (9), we obtain $k_1 = \frac{(1 + k_2)t}{k_2(1 + k_1)x_1}$,

that is, $t = \frac{k_1k_2(1 + k_1)}{(1 + k_2)}x_1$(10).

We have $\Delta = (1+k_1)x_1 + (1+k_2)t + u$

$$= (1+k_1)x_1 + (1+k_2) \cdot \frac{k_1k_2(1+k_1)}{(1+k_2)} x_1 + k_2(1+k_1)x_1 \quad \text{by (9) and (10)}$$

$$= (1+k_1)(1+k_2+k_1k_2)x_1.$$

By cyclically permuting the subscripts $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$, we also obtain

$$\begin{aligned} \Delta &= (1+k_1)(1+k_2+k_1k_2)x_1 \\ &= (1+k_2)(1+k_3+k_2k_3)x_2 \\ &= (1+k_3)(1+k_1+k_3k_1)x_3 \end{aligned}$$

that is, $x_1 = \frac{\Delta}{(1+k_1)(1+k_2+k_1k_2)}$, $x_2 = \frac{\Delta}{(1+k_2)(1+k_3+k_2k_3)}$,

$$x_3 = \frac{\Delta}{(1+k_3)(1+k_1+k_3k_1)} \dots\dots(11).$$

Since the area of the "corner triangle" depends only on the two sides forming that triangle, that is, x_1 depends only on k_1 and k_2 , etc., these results are as expected.

Note that by (9), $x_3 + y_3 + w_3 = u = k_2(1+k_1)x_1$.

Cyclically permuting the subscripts again, we have

$$x_1 + y_1 + w_1 = k_3(1+k_2)x_2,$$

$$x_2 + y_2 + w_2 = k_1(1 + k_3)x_3.$$

Hence

$$\begin{aligned} z &= \Delta - [(x_1 + y_1 + w_1) + (x_2 + y_2 + w_2) + (x_3 + y_3 + w_3)] \\ &= \Delta - [k_2(1 + k_1)x_1 + k_3(1 + k_2)x_2 + k_1(1 + k_3)x_3]. \end{aligned}$$

By (11), we have

$$\begin{aligned} z &= \Delta - \left[\frac{k_2(1 + k_1)\Delta}{(1 + k_1)(1 + k_2 + k_1k_2)} + \frac{k_3(1 + k_2)\Delta}{(1 + k_2)(1 + k_3 + k_2k_3)} + \frac{k_1(1 + k_3)\Delta}{(1 + k_3)(1 + k_1 + k_3k_1)} \right] \\ \frac{z}{\Delta} &= 1 - \left(\frac{k_2}{1 + k_2 + k_1k_2} + \frac{k_3}{1 + k_3 + k_2k_3} + \frac{k_1}{1 + k_1 + k_3k_1} \right) \dots\dots(12). \end{aligned}$$

To simplify (12), we calculate

$$(1 + k_2 + k_1k_2)(1 + k_3 + k_2k_3)(1 + k_1 + k_3k_1) \quad \text{and}$$

$$\begin{aligned} &k_2(1 + k_3 + k_2k_3)(1 + k_1 + k_3k_1) + k_3(1 + k_2 + k_1k_2)(1 + k_1 + k_3k_1) + \\ &k_1(1 + k_2 + k_1k_2)(1 + k_3 + k_2k_3). \end{aligned}$$

First, we compute $k_2(1 + k_3 + k_2k_3)(1 + k_1 + k_3k_1)$, then cyclically permute subscripts $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ to obtain the other two similar terms. Adding up all the three terms, we obtain

$$(k_1 + k_2 + k_3)(1 + 2k_1k_2k_3) + (2 + k_1k_2k_3)(k_1k_2 + k_2k_3 + k_3k_1) +$$

$$(k_1^2k_2 + k_2^2k_3 + k_3^2k_1) + 6k_1k_2k_3.$$

On the other hand, $(1 + k_2 + k_1k_2)(1 + k_3 + k_2k_3)(1 + k_1 + k_3k_1)$

$$= 1 + (k_1 + k_2 + k_3)(1 + 2k_1k_2k_3) + (2 + k_1k_2k_3)(k_1k_2 + k_2k_3 + k_3k_1) +$$

$$(k_1^2k_2 + k_2^2k_3 + k_3^2k_1) + 4k_1k_2k_3 + (k_1k_2k_3)^2$$

Hence $\frac{z}{\Delta} = \frac{1 - 2k_1k_2k_3 + (k_1k_2k_3)^2}{(1 + k_2 + k_1k_2)(1 + k_3 + k_2k_3)(1 + k_1 + k_3k_1)}$

$$= \frac{(1 - k_1k_2k_3)^2}{(1 + k_2 + k_1k_2)(1 + k_3 + k_2k_3)(1 + k_1 + k_3k_1)} \dots\dots(13).$$

Remark (3)

Note that when k_1 , k_2 and k_3 are replaced by their respective reciprocals with k_2 and k_3 interchanged, z remains invariant. This is a feature we already pointed out at the end of Section II, which is apparent from a geometric consideration through a mirror reflection.

Remark (4)

If $k_1 = k_2 = k_3 = k$, then

$$\frac{z}{\Delta} = \frac{(1-k^3)^2}{(1+k+k^2)(1+k+k^2)(1+k+k^2)} = \frac{(1-k)^2(1+k+k^2)^2}{(1+k+k^2)^3}$$

$$= \frac{(1-k)^2}{(1+k+k^2)}, \text{ which is the same as what we got before as (7) in}$$

Section III. Likewise, we have

$$AP : PQ : QD = [\Delta BAP] : [\Delta BPQ] : [\Delta BQD] = (1+k)x : (t-x) : x$$

as in Section III. When $k = 2$, this implies

$$AP : PQ : QD = 3 : 3 : 1$$

so that, like the special case of an equilateral triangle (see Remark (1) in Section III), P , Q and R are the mid-points of AQ , BR and CP respectively.

The following table shows different values of k and the proportion of z over Δ .

k	$\frac{z}{\Delta}$
1	0
2	$\frac{1}{7} = 0.142857\dots$
3	$\frac{4}{13} = 0.307692\dots$
4	$\frac{3}{7} = 0.428571\dots$
5	$\frac{16}{31} = 0.516129\dots$

For $\frac{z}{\Delta} = \frac{1}{2}$, $k = \frac{5 + \sqrt{21}}{2} = 4.791287\dots$ or its reciprocal

$k = \frac{5 - \sqrt{21}}{2} = 0.208712\dots$, as calculated in Section II.

Remark (5)

As a corollary, $z=0$ if and only if $k_1 k_2 k_3 = 1$, that is,

$$\frac{CD}{DB} \times \frac{AE}{EC} \times \frac{BF}{FA} = 1. \text{ This is the criterion for concurrence of } AD,$$

BE and CF in Ceva's Theorem. (See Figure 11.)

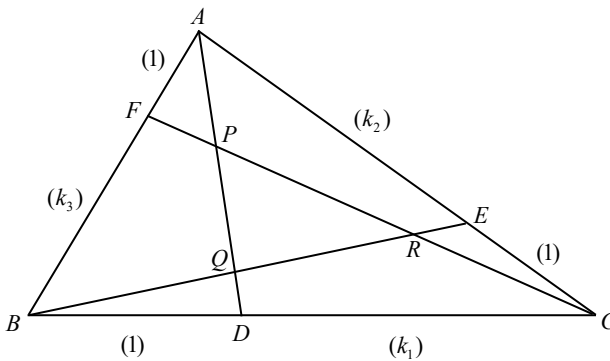


Figure 11

Ceva's Theorem

D, E and F are points on BC, CA and AB respectively of a given $\triangle ABC$. Then AD, BE and CF are concurrent if and only if

$$\frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} \times \frac{AF}{FB} = 1.$$

Knowing that P , Q and R are the mid-points of AQ , BR and CP respectively in the case where $k = 2$, as shown in Remark (4), we can give a visual proof shown in Figure 12.

The polygon $AXRCZQBYP$ with $XRZ \parallel AD$, $YPX \parallel BE$ and $ZQY \parallel CF$ has the same area as that of $\triangle ABC$ and is composed of seven copies of $\triangle PQR$. However, one “blemish” of this seemingly elegant visual proof is that once we know P , Q and R are the mid-points of AQ , BR and CP respectively, there is a shorter proof that $\frac{z}{\Delta} = \frac{1}{7}$ by some easy means without going through the former calculation, which is admittedly rather laborious. Yet, so far, we can only see that P , Q and R are the mid-points of AQ , BR and CP respectively through that former calculation. Strictly speaking, this visual explanation offers some hint but is not yet a complete proof in that we cannot *see* that P , Q and R are the mid-points of AQ , BR and CP respectively from the picture at one glance other than by a calculation!

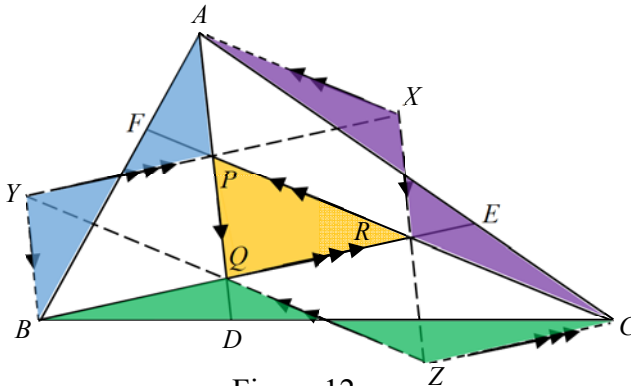


Figure 12

V. Alternative Proof of Ratio of Areas by Vector Approach

Apart from purely geometric proof, here we present an alternative method to work out the formulas in (11) and thence the formula in (13) by vectors. Note that $[\Delta ABD] = \frac{\Delta}{1+k_1}$ and $[\Delta QBD] = x_1$. Our goal is to find the ratio $DQ : QA$. (See Figure 13.)

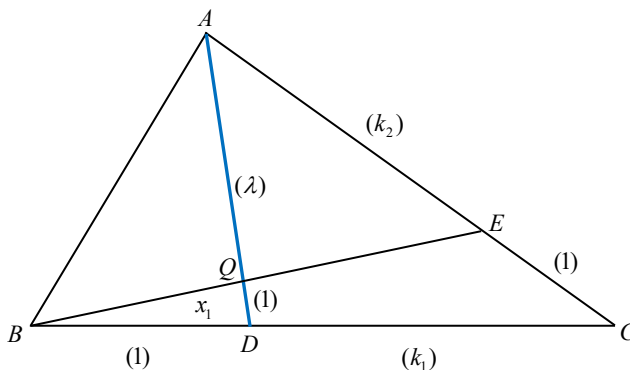


Figure 13

Let $\overrightarrow{BD} = \vec{p}$, $\overrightarrow{BA} = \vec{q}$ and $DQ:QA = 1:\lambda$.

By section formula, we have

$$\overrightarrow{BQ} = \frac{\lambda \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA}}{\lambda + 1} = \frac{\lambda \vec{p} + \vec{q}}{\lambda + 1}, \text{ and}$$

$$\overrightarrow{BE} = \frac{k_2 \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}}{k_2 + 1} = \frac{k_2(1 + k_1)\vec{p} + \vec{q}}{k_2 + 1}.$$

Since B , Q and E are collinear, we have

$$\frac{\frac{\lambda}{\lambda + 1}}{\frac{k_2(1 + k_1)}{k_2 + 1}} = \frac{\frac{1}{\lambda + 1}}{\frac{1}{k_2 + 1}}.$$

so that $\lambda = k_2(1 + k_1) = k_2 + k_1 k_2$.

Hence,

$$x_1 = [\Delta QBD] = \frac{[\Delta ABD]}{1 + \lambda} = \frac{\Delta}{(1 + k_1)(1 + \lambda)} = \frac{\Delta}{(1 + k_1)(1 + k_2 + k_1 k_2)}.$$

By cyclically permuting the subscripts $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$, we obtain the formulas for x_2 and x_3 . Subsequently, we can

obtain the formula of $\frac{z}{\Delta}$ as (13) in Section IV.

VI. Yet Another Proof by Menelaus' Theorem

The division of $\triangle ABC$ by line segments AD , BE and CF resembles the setting of a famous theorem, which is dual to Ceva's Theorem. It was a theorem first announced by the ancient Greek mathematician Menelaus of Alexandria.

Menelaus' Theorem

D , E and F are points on BC , CA and AB respectively of a given $\triangle ABC$. Then D , E and F are collinear if and only if

$$\frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} \times \frac{AF}{FB} = -1.$$

where a sign convention on directed line segments is taken into account.

Note that if DEF is a transversal line that crosses the three sides of a triangle, one of the three points has to lie on a side produced. We shall now make use of Menelaus' Theorem to prove the result in Section IV again. Regard BQE as a transversal line of $\triangle ADC$. (See Figure 14.)

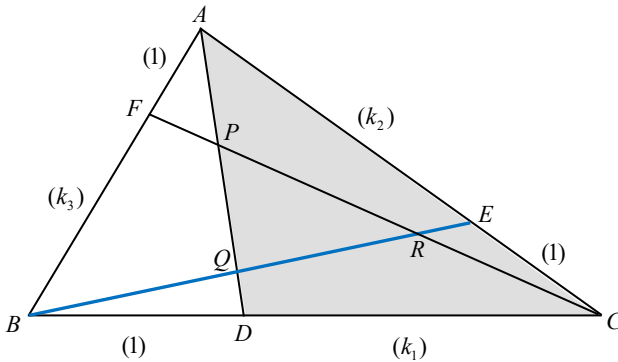


Figure 14

As B , Q and E are collinear, we have by Menelaus' Theorem

$$\frac{AQ}{QD} \times \frac{DB}{BC} \times \frac{CE}{EA} = 1$$

(neglecting the sign convention for directed line segment),

$$\text{that is, } \frac{AQ}{QD} \times \frac{1}{1+k_1} \times \frac{1}{k_2} = 1,$$

$$\text{so } \frac{AQ}{QD} = k_2(1+k_1).$$

$$\text{Therefore, } \frac{AD}{QD} = \frac{QD+AQ}{QD} = 1 + \frac{AQ}{QD} = 1 + k_2(1+k_1).$$

$$\text{Hence, } x_1 = [\Delta BDQ] = [\Delta ABD] \times \frac{QD}{AD} = \frac{\Delta}{1+k_1} \times \frac{1}{1+k_2(1+k_1)}$$

$$= \frac{\Delta}{(1+k_1)(1+k_2+k_1k_2)},$$

which is the first formula of (11) in Section IV. The rest follows as in Section IV.

VII. A Similar Proof of Menelaus' Theorem Using Ratio of Area

We will apply the same computations of areas of triangles in Section IV to obtain a proof of Menelaus' Theorem. To begin with, we prove several preliminary results before getting to the case we are interested in, namely, when one of the points, say D , lies on BC produced. Indeed, the setting is similar to that as in Section IV, but we will obtain the ratio of area of $\triangle DEF$ to that of $\triangle ABC$.

Lemma

In $\triangle ABC$, D lies on BC and F lies on AB such that $BD:DC = 1:k_1$ and $AF:FB = 1:k_3$. Let $[\triangle BDF] = x$, then

$$\frac{x}{\Delta} = \frac{k_3}{(1+k_3)(1+k_1)}. \text{ (See Figure 15.)}$$

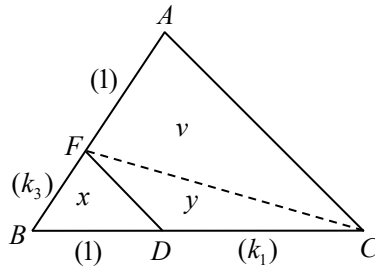


Figure 15

Proof

Construct CF and let $[\Delta CDF] = y$ and $[\Delta AFC] = v$.

$$\frac{y}{x} = \frac{[\Delta CDF]}{[\Delta BDF]} = \frac{CD}{BD} = k_1, \text{ so } y = k_1 x.$$

$$\frac{v}{x+y} = \frac{[\Delta AFC]}{[\Delta BFC]} = \frac{AF}{BF} = \frac{1}{k_3}, \text{ so } v = \frac{x+y}{k_3}.$$

$$\Delta = x + y + v = (1 + k_1)x + \frac{(1 + k_1)x}{k_3} = \frac{(1 + k_3)(1 + k_1)x}{k_3},$$

hence $\frac{x}{\Delta} = \frac{k_3}{(1 + k_3)(1 + k_1)}.$

After considering one "corner triangle", we can apply the same principle to the case of three internal points of division D , E and F . Let $CE:EA=1:k_2$. Refer to the areas of triangles as shown in Figure 16.

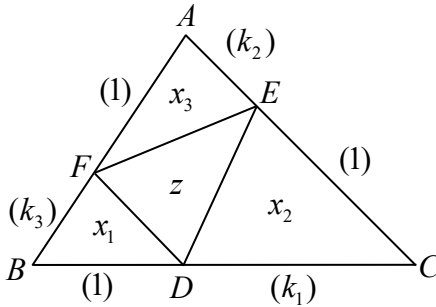


Figure 16

By cyclically permuting the subscripts $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$, we have

$$\frac{x_1}{\Delta} = \frac{k_3}{(1+k_3)(1+k_1)}, \quad \frac{x_2}{\Delta} = \frac{k_1}{(1+k_1)(1+k_2)}, \quad \frac{x_3}{\Delta} = \frac{k_2}{(1+k_2)(1+k_3)}.$$

Thus, we can compute the ratio of area of $\triangle DEF$ to that of $\triangle ABC$, namely,

$$z = \Delta - (x_1 + x_2 + x_3)$$

$$= \Delta - \left[\frac{k_3}{(1+k_3)(1+k_1)} + \frac{k_1}{(1+k_1)(1+k_2)} + \frac{k_2}{(1+k_2)(1+k_3)} \right] \Delta,$$

$$\text{or } \frac{z}{\Delta} = 1 - \left[\frac{k_3}{(1+k_3)(1+k_1)} + \frac{k_1}{(1+k_1)(1+k_2)} + \frac{k_2}{(1+k_2)(1+k_3)} \right].$$

Note that

$$(1+k_1)(1+k_2)(1+k_3) = 1 + (k_1+k_2+k_3) + (k_1k_2+k_2k_3+k_3k_1) + (k_1k_2k_3)$$

and

$$k_3(1+k_2) + k_1(1+k_3) + k_2(1+k_1) = (k_1+k_2+k_3) + (k_1k_2+k_2k_3+k_3k_1).$$

$$\text{Hence } \frac{z}{\Delta} = \frac{1+k_1k_2k_3}{(1+k_1)(1+k_2)(1+k_3)} \dots\dots(14).$$

Remark (6)

Note that z remains invariant under the replacement of k_1, k_2 and k_3 by their respective reciprocals with k_2 and k_3 interchanged. This is apparent from a geometric consideration. (See Figure 16 and Figure 17.)

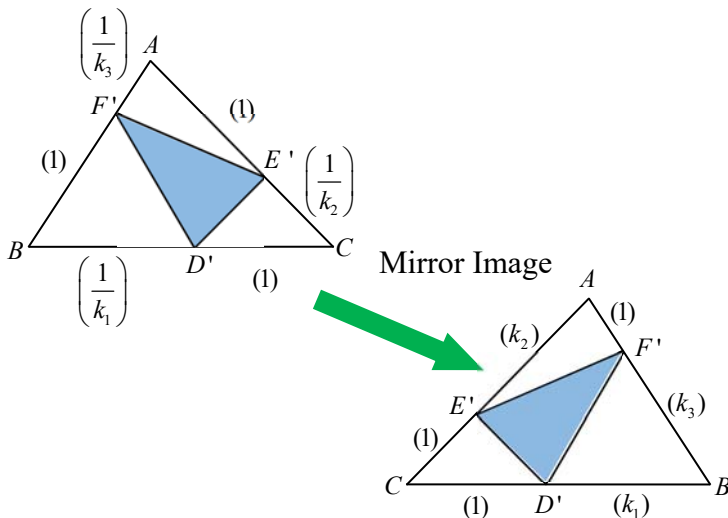


Figure 17

The same argument goes through when D is on BC produced. It turns out the modification is on a sign of k_1 (sign convention of the directed line segment). Here we have $k_1 < 1$. (See Figure 18.)

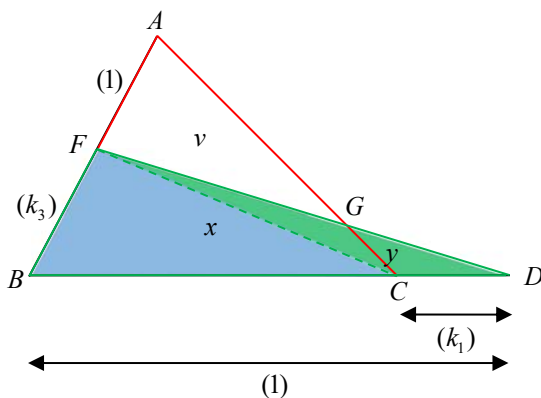


Figure 18

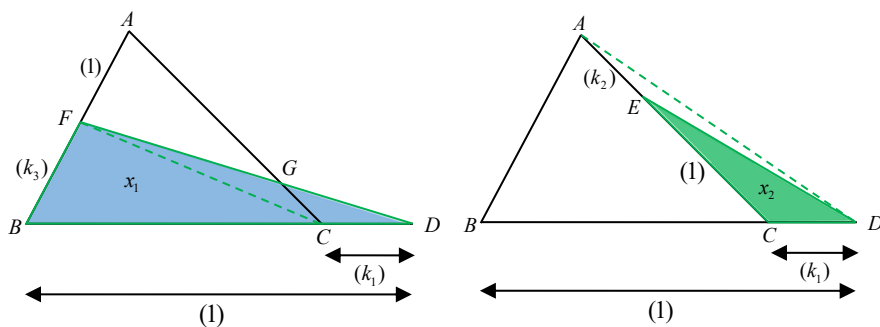
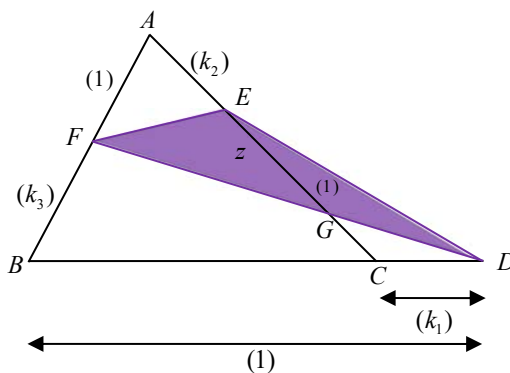
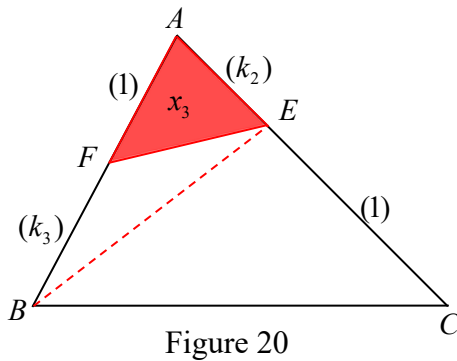


Figure 19



Let AC and DF intersect at G .

Let $[\triangle BDF] = x$, $[\triangle CDF] = y$ and $[\triangle AFC] = v$.

$$\frac{x}{y} = \frac{[\triangle BDF]}{[\triangle CDF]} = \frac{BD}{CD} = \frac{1}{k_1}, \text{ so } y = k_1 x.$$

$$\frac{v}{x-y} = \frac{[\triangle AFC]}{[\triangle BFC]} = \frac{AF}{BF} = \frac{1}{k_3}, \text{ so } v = \frac{(1-k_1)x}{k_3}.$$

$$\Delta = x - y + v = (1 - k_1)x + \frac{(1 - k_1)x}{k_3} = \frac{(1 - k_1)(1 + k_3)x}{k_3}.$$

$$\text{Hence } \frac{x}{\Delta} = \frac{k_3}{(1 - k_1)(1 + k_3)}.$$

By considering three "corner" triangles, we have the following areas shown in Figure 19 and Figure 20.

Cyclically permuting the subscripts $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$, and considering the change in sign in the denominators from k_3 to k_1 , and from k_1 to k_2 , we have

$$x_1 = \frac{k_3 \Delta}{(1 - k_1)(1 + k_3)},$$

$$x_2 = \frac{k_1 \Delta}{(1 - k_1)(1 + k_2)},$$

$$x_3 = \frac{k_2 \Delta}{(1 + k_2)(1 + k_3)}.$$

Refer to Figure 18, Figure 19, Figure 20 and Figure 21, we have

$$\Delta = x_3 + (x_1 - [\Delta GCD]) + z - (x_2 - [\Delta GCD]) = z + (x_1 - x_2 + x_3),$$

$$z = \Delta - (x_1 - x_2 + x_3)$$

$$= \Delta - \left[\frac{k_3 \Delta}{(1 - k_1)(1 + k_3)} - \frac{k_1 \Delta}{(1 - k_1)(1 + k_2)} + \frac{k_2 \Delta}{(1 + k_2)(1 + k_3)} \right],$$

$$\text{or } \frac{z}{\Delta} = 1 - \left[\frac{k_3}{(1 - k_1)(1 + k_3)} - \frac{k_1}{(1 - k_1)(1 + k_2)} + \frac{k_2}{(1 + k_2)(1 + k_3)} \right].$$

Note that

$$(1 - k_1)(1 + k_2)(1 + k_3) = 1 + (-k_1 + k_2 + k_3) + (-k_1k_2 + k_2k_3 - k_3k_1) - k_1k_2k_3$$

and

$$k_3(1 + k_2) - k_1(1 + k_3) + k_2(1 - k_1) = (-k_1 + k_2 + k_3) + (-k_1k_2 + k_2k_3 - k_3k_1).$$

Hence,
$$\frac{z}{\Delta} = \frac{1 - k_1k_2k_3}{(1 - k_1)(1 + k_2)(1 + k_3)} \dots\dots (15)$$

Compare (15) with (14) to see the modification on the sign of k_1 .

Note that $z = 0$ if and only if $k_1k_2k_3 = 1$. In this case, D , E and F are collinear. Thus, we obtain a criterion in Menelaus' Theorem.

Remark (7)

When $k_1 = k_2 = k_3 = k$ and D , E and F are internal points on the three sides, we have

$$\frac{[\Delta DEF]}{[\Delta ABC]} = \frac{1 + k^3}{(1 + k)^3} = \frac{1 - k + k^2}{(1 + k)^2} \text{ by putting } k_1 = k_2 = k_3 = k$$

in (14).

Compare with $\frac{[\Delta PQR]}{[\Delta ABC]} = \frac{(1-k)^2}{1+k+k^2}$ by putting $k_1 = k_2 = k_3 = k$

in (13) in Section IV, which takes a similar form.

In particular, if $\frac{[\Delta DEF]}{[\Delta ABC]} = \frac{1}{2}$, we have $k^2 - 4k + 1 = 0$, so $k = 2 \pm \sqrt{3}$.

It is surprising that the dual version of Menelaus' Theorem was discovered more than 1500 years afterwards in the form of Ceva's Theorem, while the statement of the result should be comprehensible to an ancient Greek mathematician. One explanation is perhaps that Menelaus discovered his theorem in the context of spherical geometry in connection with the study of geodesic in astronomy. In this context, collinearity of three points is the focus rather than the concurrence of three lines. In advanced mathematics, these two theorems can be formulated as dual results neatly in projective geometry, where points and lines play equal roles. Thus, it seems natural that we can apply a similar method to prove Menelaus' Theorem in Section VII as we prove Ceva's Theorem in Section IV.

Epilogue

This excursion began with a problem in class, then went on with an extension, then to some generalization, which happily led us to stumble upon two famous classical results, Ceva's Theorem and Menelaus' Theorem. Readers may find an article published in a recent issue of the local mathematical periodical *EduMath* interesting: C. K. Leung [梁子傑], 三角形線分比的關係, *EduMath* [數學教育], 47 (2024). In that article, the author explains how he was triggered by a theorem in a Japanese supplementary mathematical text to further investigation, also coming up with Ceva's Theorem and Menelaus' Theorem. He gives a lot of examples to illustrate the usefulness of these two theorems. Our emphasis in this excursion is somewhat in another direction, namely, not so much on how to apply those theorems but to remind ourselves what we can, as teachers of mathematics, look at a single problem from different viewpoints, thereby inviting students to explore together with us along the way. For instance, one can go on to investigate the case of a square instead of an equilateral triangle, or even an arbitrary quadrilateral, etc.

Yuri Ivanovich Manin (1937-2023), an eminent Russian mathematician of recent times, once said in an address at the 7th

International Congress of Mathematical Education in 1992, "Axioms, definitions and theorems are spots in a *mathscape*, local attractions and crossroads. Proofs are the roads themselves, the paths and highways. Every itinerary has its own sightseeing qualities, which may be more important than the fact that it leads from A to B. We are lucky if our route leads us through a fertile land, and if we can lure other travellers to follow us."

Authors' Contact:

Choi Wai-fung, Brian

e-mail: wfchoi9981@gmail.com

YouTube Channel: Mathusiasm

<https://www.youtube.com/@mathusiasm>

Siu Man-keung

e-mail: mathsiu@hku.hk

摺出數學世界：簡單的摺紙教學例子

羅永昌教授

香港城市大學數學系

引言

摺紙藝術已擁有超過千年的歷史，而在近代工業設計中更得到廣泛應用^[1,2]。這項藝術涉及的技術涵蓋多種科學原理，例如數學、材料科學、物理學和動力學等。同時，摺紙藝術也被運用於數學教育中，提供了許多實例作為教學工具^[3]。本文的目的是分享一些摺紙教學的例子，以展示如何將摺紙技巧與中小學數學教育融合在一起。

摺紙在畢氏定理證明的應用

在直角三角形的理論中，畢氏定理是其中最有代表性的定理，在中學數學教學中扮演著重要的角色。該定理描述了直角三角形三邊之間的關係，可以用以下公式表示（圖1）：

$$a^2 + b^2 = c^2$$

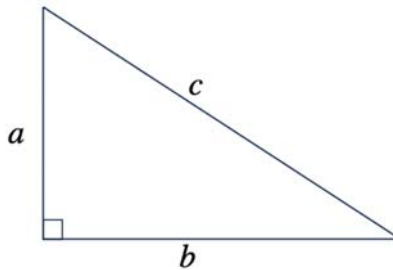


圖 1: 畢氏定理

其中， c 是直角三角形的斜邊，而 a 和 b 分別是直角的兩條相鄰邊。這個公式表明，在直角三角形中，斜邊的平方等於兩個相鄰邊的平方和。它的應用範圍非常廣泛，能夠解決各種幾何問題。其中，最常見的應用包括判斷一個三角形是否為直角三角形，以及解決與直角三角形相關的實際量度問題，如測量建築物的高度或距離等。此外，畢氏定理也與其他數學領域密切相關，例如代數和三角函數的應用。

在李政憲的著作《藝數摺學》^[4]中，提出了一種與畢氏定理的「拼圖法」證明相關的摺紙教學方法。圖 2 展示了畢氏定理的「拼圖法」證明。

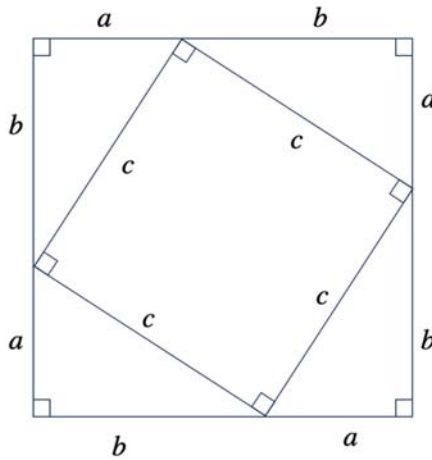


圖 2: 畢氏定理的「拼圖法」證明

圖 2 中的大正方形包含了四個全等的直角三角形（直角的兩條相鄰邊長度為 a 和 b ，斜邊長度為 c ）和中間的小正方形（邊長是 c ）。由於大正方形是由四個直角三角形和中間的正方形組成，我們可以列出以下數學等式：

$$(a + b)^2 = 4(ab/2) + c^2$$

以此簡單整理一下就可得到畢氏定理的公式：

$$a^2 + b^2 = c^2$$

在教學上，也可配合摺紙加深學生對證明的記憶。用一張正方形色紙跟著以下步驟就可以作成「拼圖法」的展示圖：

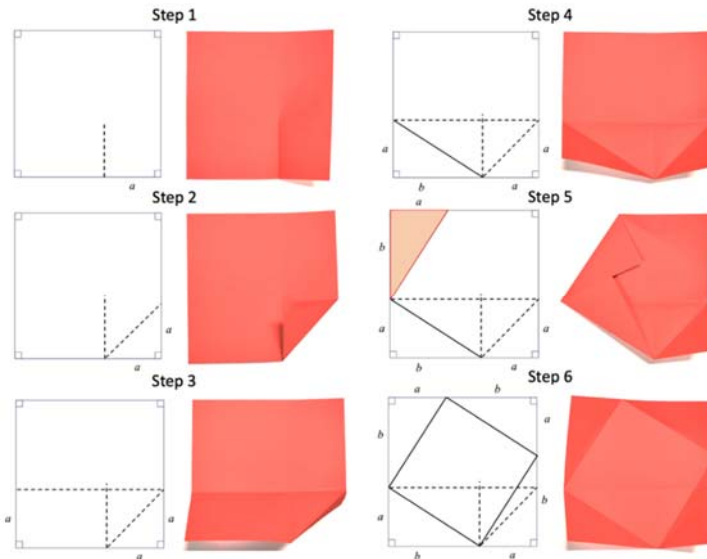


圖 3: 以摺紙摺出「拼圖法」的展示圖

李政憲教師在摺紙過程中提出了一些簡單的三角形問題，非常適合在香港中學的課程中提出。這樣的問題能夠培養學生的幾何思維和推理能力，同時幫助他們理解和應用三角形的概念。這裡提出一條相關問題以作參考：

試證明圖 3 中 Step 5 中摺出來的三角形（標為橙色的）的短邊是 a 。

中學教師可以將這些問題作為課堂作業，讓學生自行思考和解決。這種互動的學習方式能夠激發學生的學習興趣，同時有助於加強學生對畢氏定理的證明方法的記憶。

正方形中最大的正三角形

在 Thomas Hull 的著作《Project Origami》^[5]中，提出了一個問題：

如何在一張正方形紙中摺出一個最大的正三角形？

這問題的解答包含了函數建構的技巧和三角函數的應用。

簡單來說，可以跟從以下步驟在一張正方形紙摺出一個正三角形：

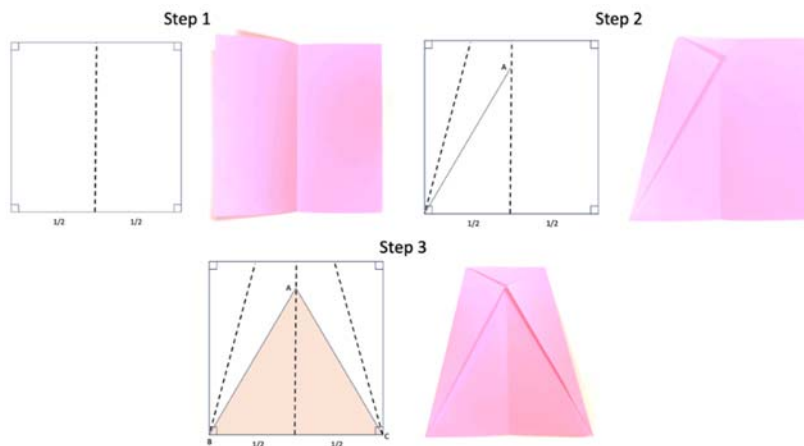


圖 4: 正方形紙摺出一個正三角形

要證明以上的三角是正三角形並不困難。因正方形的四邊長度是相同，我們可得出 $AB = BC = AC$ ，這樣就證明了 ABC 是一個正三角形。可惜，這正三角形並不是正方形紙上最大的那個。

要找出最大的正三角形，可分為兩個步驟：

- 一 證明最大的正三角形的其中一角，可與正方形的一角重合。
- 二 以「一」為前提，建構出正三角形面積的函數，從而找出最大的正三角形。

第一個步驟的證明：若最大的正三角形的一角沒有與大正方形任何的一角重合，那可推出正方形存在一邊（假設為左邊）沒有和三角形接觸（因三角形有三角，而正方形只有四邊）。假設我們考慮的正三角形已是正方形中的最大一個。這三角形的三個角應會接觸正方形的其餘三條邊。我們可把這三角形水平移到左邊直到三角形的一角接觸到左邊的一角（上或下），那就可證明出「最大的正三角形的其中一角，可與大正方形的一角重合」。

第二個步驟：假設最大的正三角形的其中一角與大正方形（邊長為 1）的左下角重合（如圖 5 左），我們可以建構出一個以角度 x 為變數的正三角形邊長函數：

$$L(x) = \begin{cases} \sec(x), & 0 \leq x < \frac{\pi}{12} \\ \sec\left(\frac{\pi}{6} - x\right), & \frac{\pi}{12} \leq x \leq \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

以此，我們可得出以下正三角形面積的函數：

$$\text{Area}(x) = \frac{L(x)^2 \sqrt{3}}{2}.$$

$\text{Area}(x)$ 的最大值明顯是 $\frac{L\left(\frac{\pi}{12}\right)^2 \sqrt{3}}{2}$ 當 $x = \frac{\pi}{12}$ （如圖 5 右）。

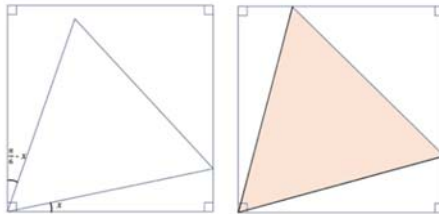


圖 5: 正方形紙中最大的正三角形

對圖 4 的摺紙技巧作出變化也可在色紙上摺出最大的正三角形：

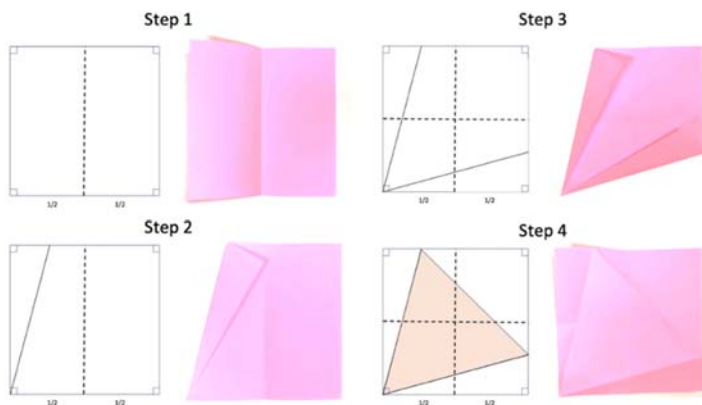


圖 6: 正方形紙中摺出最大的正三角形

對應這主題，教師可在教學時提出以下問題來加強學生的記憶：

試證明圖 6 的 Step 4 中摺出來的三角形是正三角形。

同時也可提出以下一個摺紙問題^[5]：

如何用同樣技巧在正方形紙中摺出最大的正六邊形。（答案可參考圖 7）

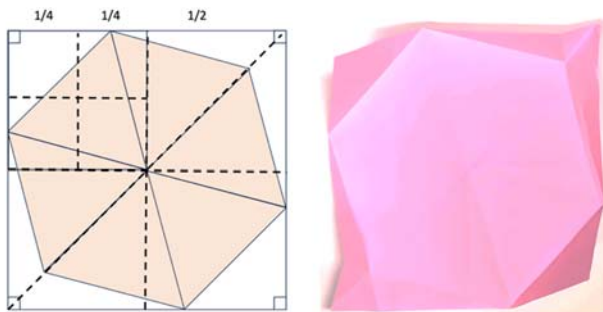


圖 7: 正方形紙中摺出最大的正六邊形

平摺的應用和理論

平面摺紙 (Flat-Foldable Origami) 是一種摺紙技巧，指的是將紙張按照特定的方式摺疊，使其可以完全平展在平面上。這種技巧在設計和創作中具有廣泛的應用，小至購物紙袋的設計，大至人造衛星太陽能板的摺疊，也應用了平面摺紙的技巧^[1,6]。平面摺紙作為一種重要的摺紙技巧，不僅在藝術創作和工程上的設計中發揮著廣泛作用，更在數學理論研究有著重要的價值。

我們可以從一個簡單的問題談起。在圖 8 兩個摺紙圖案中，哪一個可以摺成平面？

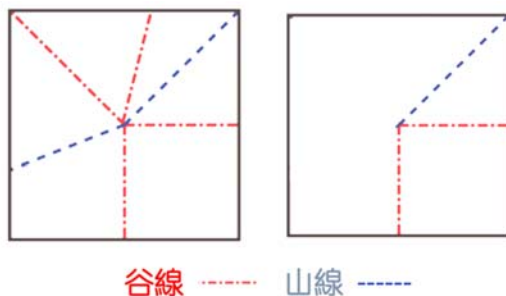


圖 8: 可否摺成平面? 谷線: 將這條線兩側的紙向你自身的方向摺, 摺出形狀類似山谷。山線: 將這條線兩側的紙向你自身面向的方向摺, 摺出形狀類似山峰。

要了解如何解答這問題, 我們可從兩個定理入手, 分別是前川定理和川崎定理:

1. 前川定理 (Maekawa's theorem) 以日本折紙研究學者前川淳之名命名。前川定理指出, 平面摺紙的每個摺痕交會點上, 山線和谷線的數量相差一定是 2。
2. 川崎定理 (Kawasaki's theorem) 以日本折紙研究學者川崎敏和之名命名。川崎定理在具有單點的摺痕圖案中, 可以將其折疊成平面的必要條件是交替地加和減去圍繞頂點的角度後的和為 0。

讀者在參考資料^[7]可找到相關證明的資料，這裡只集中分享如何運用這兩定理。

以圖 8 右邊的圖為例（圖 9），山線數和谷線數相差為 1（不符合前川定理）和交替角的交替加減不是零（不符合川崎定理），所以我們應用兩條定理可得出右圖不可能作出平摺這結論（圖 10 右）。

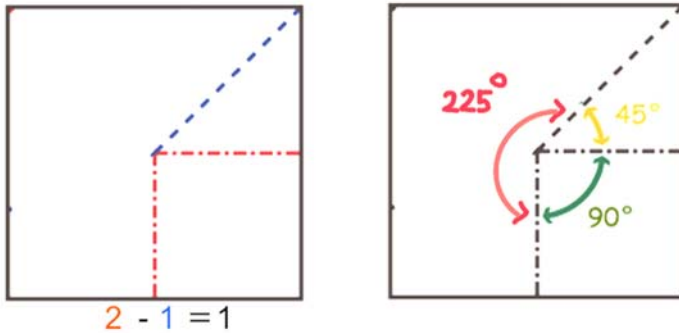


圖 9: 圖 8 右邊的圖不符合前川定理和川崎定理

另一方面，圖 8 的左圖符合了前川定理和川崎定理，但在這情況下也不一定可摺出平面。我們可以通過測試驗證左圖可摺成平面（圖 10 左）。

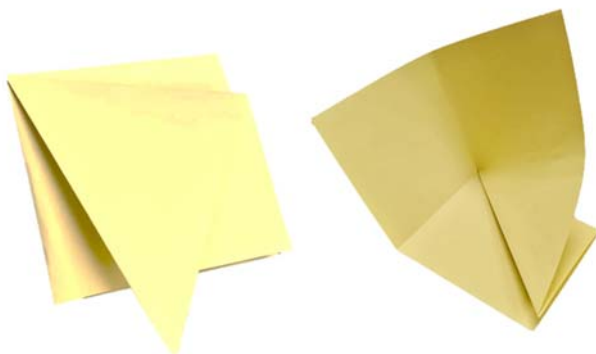


圖 10: 對應圖 8 的摺法。左邊的可以摺成平面，右邊的不可以。

教師們在教學時可設定一些問題來考驗學生對這兩條定理的理解，如以下的問題：

以圖 11 中兩圖的摺痕圖案（黑線為摺痕線，沒有指明山線或谷線）可否摺成平面？（提示用前川定理和川崎定理）

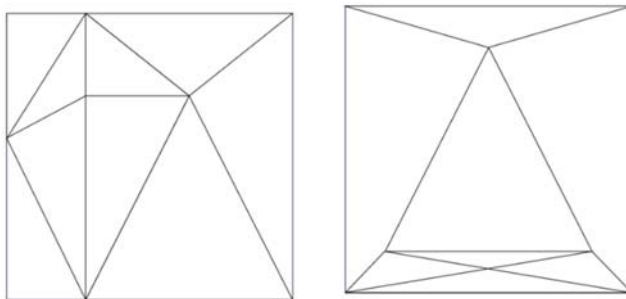


圖 11: 這兩圖可否摺成平面？

一刀剪遊戲：摺疊和剪切問題

摺紙不單是運用紙張，也可配合其他工具作出有趣的創作，如配上剪刀。摺疊和剪切問題（The Fold-and-Cut Problem）是一個歷史悠久的問題^[7]：

給定一張紙，將其摺疊成平面，然後只進行一次完整的直線剪切。接著展開紙張，我們能夠得出什麼形狀呢？

另一方面，是否所有形狀都能用摺疊加一次完整的直線剪切造出來？

第二個問題的答案能用摺疊和剪切定理 Fold-and-cut theorem^[7]來回答：任何由直線組成的形狀都可以從一張折疊平整的紙上進行一次性直線剪切造出來。

這定理有兩種證明方法，一種是使用 straight skeleton 的概念，另一種使用 disk packing，相關細節可從參考資料^[7,8]中找到。

在課堂教學活動上，可從兩方面入手設計問題：

1. 先摺疊紙張，問學生進行直線剪切後能夠得到哪些形狀？如以下簡單例子，從左邊的摺疊和剪切方法，可得出什麼圖案？學生可從摺疊的示範得出右邊的摺痕圖，從而得出答案 U。

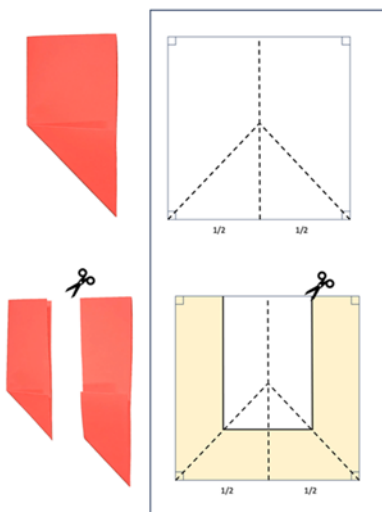


圖 12: 猜猜一刀剪後的圖案（答案 U）

2. 先提出一個圖案主題，叫學生設計相應圖案和定下摺疊方法來作一刀剪。如下圖，以香港城市大學名字作主題，以直線組成的簡單圖形造出 CITY 這個英文字，找出字中的對稱軸和直角位置，設計摺疊方法。

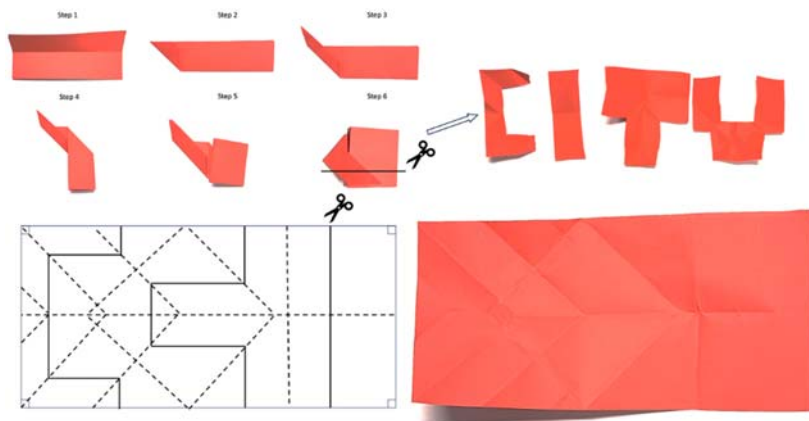


圖 13: 一刀剪出 CITY 這個字

這些問題要求學生在空間中進行操作和視覺化。通過解決摺疊和剪切問題，學生能夠培養幾何思維，理解和應用幾何概念，例如對稱性、平行關係、形狀變換等。在設計圖案時，他們需要觀察圖形的特徵，找到規律性，並應用邏輯推理來解決問題。更複雜的圖案可用 straight skeleton 方法配合電腦程式設計出摺法和剪法^[8]，這可在教學過程中作為專題計劃給一些程度較高的學生作研究，有助他們學習一些高級的數學技巧。

總結

本文主要分享了一些摺紙教學例子，包括摺紙在畢氏定理證明中的應用、正方形中最大的正三角形、平摺的應用和理論，以及摺疊和剪切問題的一刀剪遊戲。這些例子展示了摺紙在數學教學中的潛力，可以幫助學生更深入地理解數學概念，培養解決問題的能力。

摺紙不僅僅是一種藝術，它也是一種教育工具，可以激發學生對數學和科學的興趣，並培養他們的創造力和解難能力。在未來的教學中，希望各教育工作者和學生可以進一步探索摺紙與其他學科的結合，提供更多豐富的學習體驗。

參考資料

- [1] Meloni, M., Cai, J., Zhang, Q., Lee, S.-H. D., Li, M., Ma, R., Parashkevov, T. E. and Feng, J. (2021) Engineering Origami: A Comprehensive Review of Recent Applications, Design Methods, and Tools. *Advanced Science*. 8, 2000636.
- [2] Mitani, J. (n.d.) Example of utilization on Origami. <https://mitani.cs.tsukuba.ac.jp/en/application.html>
- [3] 阮華剛, 譚志良 (2014) 《摺紙與數學》。數學百子櫃系列, 教育局課程發展處數學教育組。
<https://www.edb.gov.hk/attachment/tc/curriculum-development/kla/ma/res/Cabinet%2017.pdf>
- [4] 李政憲 (2019) 《藝數摺學: 18堂從 2D 到 3D 的「摺紙數學課」, 讓幾何從抽象變具體, 發現數學的實用、趣味與美》。臉譜出版社。

- [5] Hull, T. (2013) *Project Origami: Activities for Exploring Mathematics*, Second Edition (2nd ed.). A K Peters/CRC Press. <https://doi.org/10.1201/b14320>
- [6] Jet Propulsion Laboratory California Institute Technology (2014) *Solar Power, Origami-Style*.
<https://www.jpl.nasa.gov/news/solar-power-origami-style>
- [7] Hull, T. (2020) *Origametry: Mathematical Methods in Paper Folding*. Cambridge University Press.
- [8] Demaine, E. (n.d.) *Erik Demaine's Folding and Unfolding, The Fold-and-Cut Problem*.
<https://erikdemaine.org/foldcut/>

滄海遺珠

鄭仕文 程國基

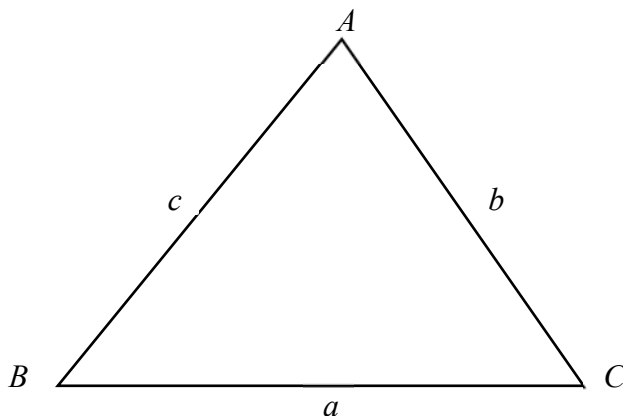
教育局數學教育組

相信所有高中數學科教師和高中學生都曾接觸正弦公式 (sine formula)、餘弦公式 (cosine formula) 和三角形面積公式 ($A = \frac{1}{2}ab\sin C$)。今天我想跟讀者分享一下三顆滄海遺珠。

正切公式 (tangent formula)

學習正弦公式 (sine formula) 和餘弦公式 (cosine formula) 是高中數學科的重頭戲，因為每年的 HKDSE 數學科必修部分考卷內必定會有相關題目出現，且佔分不少。但當我們在修畢此二課題後又可曾問一句：會不會有正切公式 (tangent formula)？如有的話，又會是什麼模樣？今天我們便去探索一下正切公式。

正切公式本身是比較複雜的公式：假設 $\triangle ABC$ 的邊長為 $AB = c$ ， $BC = a$ 及 $AC = b$ 如下圖所示。



圖一

則正切公式是 $\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}$ [1]。

看上去很複雜，因為牽涉三角形的其中兩角之和以及差。先看一看它的用途罷。

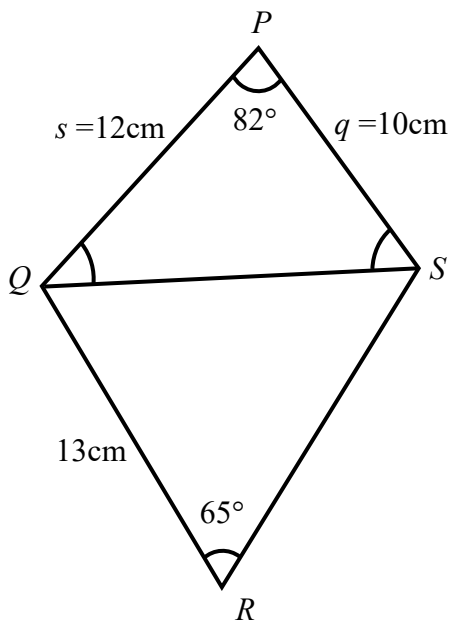
2024 HKDSE 必修部分卷一乙部第 18 題 (a)：

$PQRS$ 為四邊形金屬薄片，其中 $PQ = 12$ cm、 $PS = 10$ cm、 $QR = 13$ cm、 $\angle QPS = 82^\circ$ 及 $\angle QRS = 65^\circ$ 。求

- (i) QS 的長度，
- (ii) $\angle RQS$ 。

如果把上述資料以圖展示出來，我們有：

單看右圖，不難發現可以利用餘弦公式計算出三角形的所有值。那為什麼要用正切公式？



解答這個問題並不難，因為當年計算機並未普及，要計算餘弦公式中牽涉的平方根有一定難度，所以才會有正切公式的出現。

注意我們可以先求出 $\angle S$ 及 $\angle Q$ 的和以及利用正切公式計出它們的差，即 $\angle S - \angle Q$ 的值，然後利用解聯立方程的方法找出 $\angle S$ 和 $\angle Q$ 的值。最後利用正弦公式找出 QS 的長度，即 p 的值。

$$\frac{s-q}{s+q} = \frac{\tan\left(\frac{S-Q}{2}\right)}{\tan\left(\frac{S+Q}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{12-10}{12+10} = \frac{\tan\left(\frac{S-Q}{2}\right)}{\tan\left(\frac{98^\circ}{2}\right)} \quad \text{注意：因為 } \angle P = 82^\circ \text{，因此}$$

$$S+Q = 180^\circ - P = 180^\circ - 82^\circ = 98^\circ$$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{S-Q}{2}\right) = \frac{1}{11} \tan 49^\circ \approx 0.104578946$$

$$\Rightarrow \frac{S-Q}{2} \approx 5.97023037^\circ$$

$$\Rightarrow S-Q \approx 11.94046074^\circ \dots\dots (2)$$

利用解聯立方程的方法處理(1)和(2)得 $\angle S = 54.97023037^\circ$ ，
 $\angle Q = 84^\circ - 54.97023037^\circ = 43.02976963^\circ$ 。

最後利用正弦公式：

$$p = \frac{q \sin P}{\sin Q} = \frac{10 \times \sin 82^\circ}{\sin 43.0296963^\circ} = 14.51201074$$

問題解決了，效果不俗吧！那麼，問題又來了，為什麼今天的數學課程不用學正切公式？估計是除了上述情況外(即已知 $\triangle ABC$ 其中兩邊和夾角的大小)，正切公式可用於解決

已知 $\triangle ABC$ 其中兩角大小和其中一條不是夾在兩角之間的邊長問題，用途與正弦和餘弦公式重疊，所以最終被捨棄了。講完了它的應用，現在可以談談它的證明了。

再次利用圖一的設定，我們有 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = k$

(其中 k 為常數) $\Rightarrow a = k \sin A$ 及 $b = k \sin B$ 。

因此 $\frac{a-b}{a+b} = \frac{k \sin A - k \sin B}{k \sin A + k \sin B} = \frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B}$

接著我們利用正弦函數的和積互化公式，即

$$\sin A + \sin B = 2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \text{ 及}$$

$$\sin A - \sin B = 2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

我們有

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} = \frac{2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)} = \frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}。$$

證明也不算是太難吧！只是當中需用到正弦函數的和積互化公式，肯定只適合那些有修讀延伸單元二的同學學習了。

(這顆遺珠也實在是太暗淡了，一笑)

下一顆遺珠則比較大眾化一點，只修讀必修部分的學生都可以學到、用到。

三角形面積公式

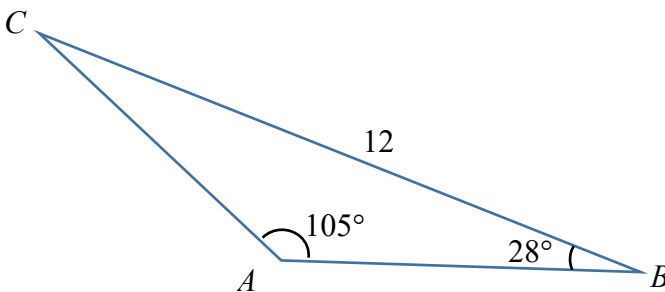
我們曾學習過的三角形面積公式，不外是三個版本，包括：

$$\text{面積} = \frac{1}{2}bh, \quad \text{面積} = \frac{1}{2}ab\sin C \quad \text{及} \quad \text{面積} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

其中 $s = \frac{a+b+c}{2}$ 。第一條公式，當然在已知三角形的底和高

時應用；第二條公式，是當知三角形的其中兩條邊及它們之間的夾角時使用；而第三條式，則在已知三角形三邊的大小時使用。這裡除了第一條式外，已包括了三邊及兩邊一（夾）角。那麼只剩下一個情況未加考慮，那便是給定兩個角，及不是這兩個角之間的邊長。讓我們先考慮以下的題目：

已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 105^\circ$ ， $\angle B = 28^\circ$ 及 $a = 12$ ，求它的面積 [2]。



如果我們用三角形面積 $= \frac{1}{2}ab\sin C$ 公式計算，我們須要先用正弦公式找到 $\triangle ABC$ 的另一條邊的長，才可以計算出它的面積。但更快的方法是利用以下公式：

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}$$

$$\Delta \text{面積} = \frac{1}{2}ab \sin C$$

$$\Delta \text{面積} = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A} \dots\dots (3)。$$

利用公式 (3) 的話，我們有

$$\Delta \text{面積} = \frac{12^2 \sin 28^\circ \sin(180^\circ - 105^\circ - 28^\circ)}{2 \sin 105^\circ} \approx 25.59325。$$

事實上，公式 (3) 是把正弦公式與三角形面積公式揉合起來的產物而已，只是望著似是一條新的公式吧。

那麼，我們是如何把正弦公式與三角形面積公式揉合起來的呢？首先，我們再次利用圖一的設定。 $\triangle ABC$ 的

面積 = $\frac{1}{2}ab\sin C$ ，同時把正弦公式 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow$

$b = \frac{a \sin B}{\sin A}$ 代入上述的面積公式內，我們有

$$\begin{aligned} \text{面積} &= \frac{1}{2}ab\sin C \\ &= \frac{1}{2}a\left(\frac{a \sin B}{\sin A}\right)\sin C \\ &= \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A} \end{aligned}$$

就這樣得出了公式 (3)。這條面積公式的好處是此後凡是要求計算已知三角形的兩個角和一條不是這兩個角之間的邊的三角形面積時，不用再分別用兩條不同公式計算，一條公式便完成所有工序了。當然，壞處便是要多記一條公式。孰優孰劣，還是由讀者去掂量吧！

下一個我想談論的是三角形的旁心。

三角形的旁心 (Excentre)

熟知香港中學數學科課程內容的教師，一般在參閱課程文件時，主要是看「數學教育學習領域課程指引補充文件：初中數學科學習內容 (2017)」的內容，或會看「中學課程綱要—數學科 (中一至中五)(1999)」作為輔助。在這兩份課程

文件中都有提出：學生須學習「三角形的四心」，這裡指的是三角形的形心（centroid）、外心（circumcentre）、內心（incentre）及垂心（orthocentre）。近年的香港中學文憑試（HKDSE）數學科必修部份卷一第 19 題，每每提出與此課題相關的題目，藉此考核學生對此課題的認知。

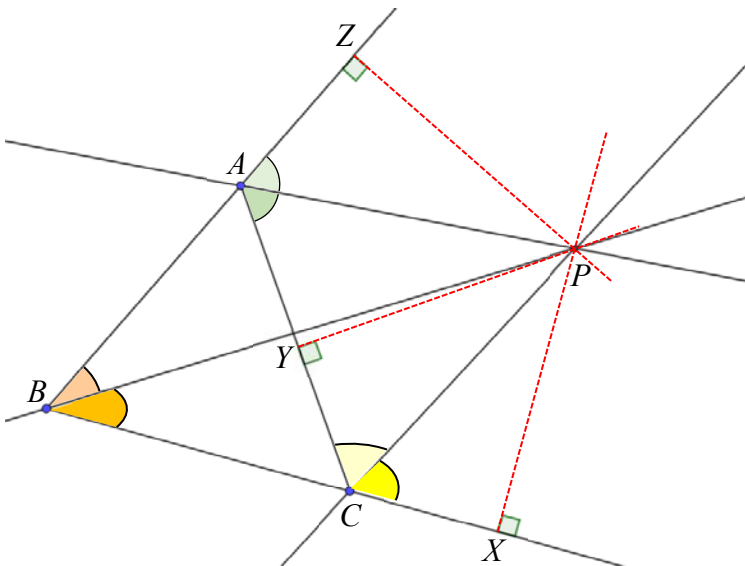
學習這四心內容對不同能力的學生產生不同影響。有些學生不費吹灰之力便學到了；但其他學生則學得一頭霧水，不知發生什麼事。我們暫且把「三角形的四心」假設為較艱深的課題吧！所以，教師們一般都在中三及中五按部就班的引入此課題的學習內容。然而，如果讀者有機會查閱舊日的課程綱要「中學課程綱要—數學科課程綱要（中一至中五適用）（1985）」，便會赫然發現綱要內提出了另一個「三角形的心」的教學建議（第 34 頁）^[3]：

中一學生在學習「角與線段的平分」時，能力較佳的學生可嘗試作圖求出三角形的內心、旁心和外心。

撇除要求中一學生運用「幾何作圖」技巧學習幾何定理，單是不學「垂心」而學「旁心」已令人感到奇怪。那到底什麼是「三角形的旁心」？翻閱一些數學資訊網站或數學字典，不難發現類似以下的定義^[4]：

三角形每一內角的平分線和其餘兩個內角的外角平分線的交點，每個三角形有三個旁心。

運用角平分線性質及判別定理，我們可作以下證明，保證以上三條角平分線交於一點^[4]：



圖二

1. 如圖二所示， $\angle ABC$ 的角平分線與 $\angle ACB$ 的外角平分線的交點為 P
2. X 、 Y 、 Z 分別為 P 到 BC 延線、 AC 、 BA 延線上的垂足。

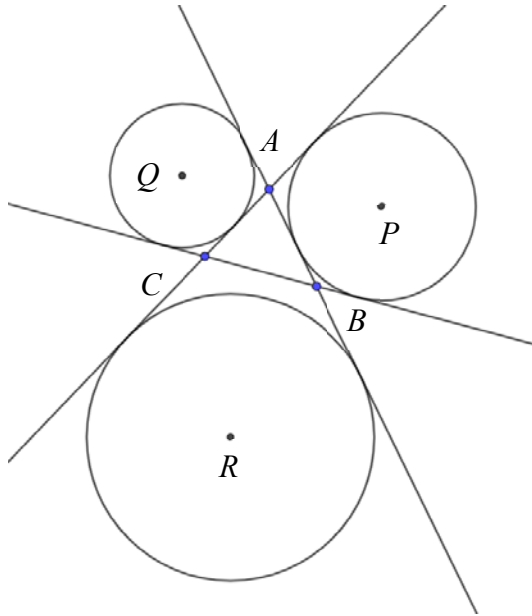
3. 由角平分線性質，有 $PX = PZ$ 、 $PY = PX$ ，由此，得出 $PY = PZ$
4. 由角平分線性質的逆定理，可以判別 AP 為 $\angle BAC$ 的外角平分線。

須注意，如上面的定義指出，每一個三角形都有三個旁心，分別對應三角形每一內角平分線。

有關旁心的性質，例如圖中每一個旁心圓（escribed circle）的半徑及坐標、雞爪定理等等並不在本文的範圍內，故不作多言了。

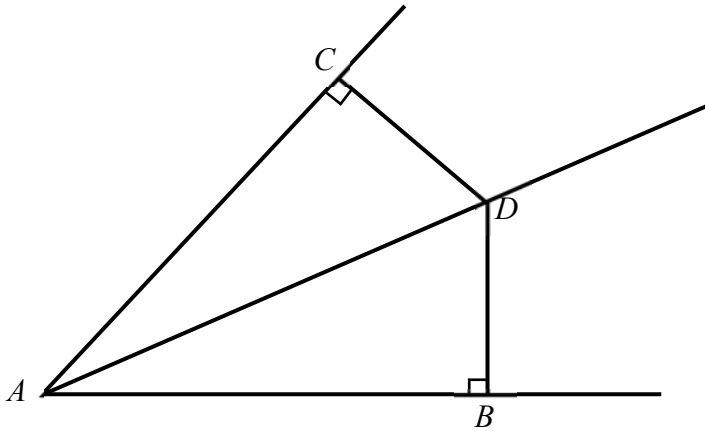
當中提及的角平分線性質又是什麼？

角平分線本身的定理是：



三角形一角的內角平分線分割對邊為兩段，兩段的長度之比等於兩條鄰邊的長度之比。

這個定理的證明不在這裡描述了，上文提及的角平分線性質，是當我們從一個 $\triangle ABC$ 作出內角平分線時，有以下幾點：



1. 角平分線可以得到兩個相等的角。
2. 角平分線上的點到角兩邊的距離相等。
3. 三角形的三條角平分線交於一點，稱作三角形內心。
三角形的內心到三角形三邊的距離相等。
4. 三角形一個角的平分線，這個角平分線其對邊所成的兩條線段與這個角的兩鄰邊對應成比例。

今次我們用到的是第 2 點。

如上圖，設射線 AD 是 $\angle CAB$ 的角平分線，求證： $CD = BD$ 。

作 $DB \perp AB$, $DC \perp AC$

$\therefore DB \perp AB$, $DC \perp AC$

$\therefore \angle DCA = \angle DBA = 90^\circ$

又 $\therefore \angle CAD = \angle BAD$

$AD = AD$

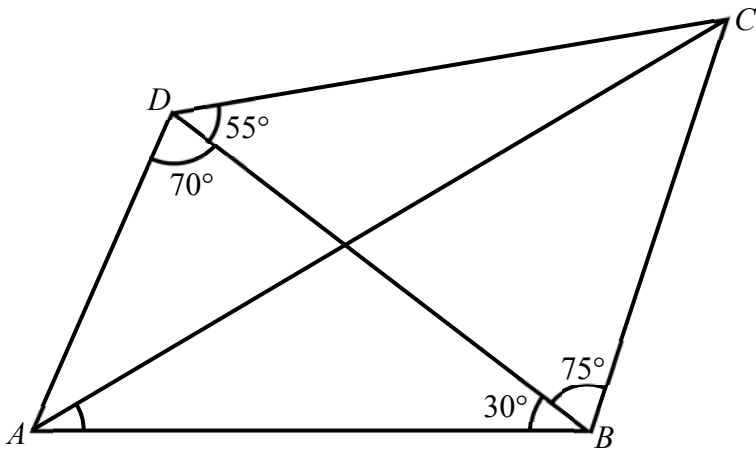
$\therefore \triangle ACD \cong \triangle ABD$

$\therefore CD = BD$

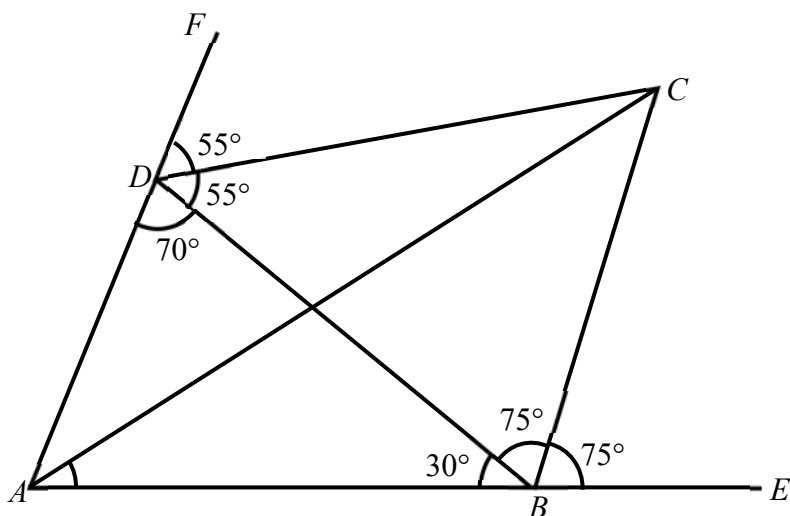
值得注意的是當年的課程綱要內要求中一學生以作圖方法認識三角形的旁心，估計是因為它與三角形的內心一樣，只涉及三角形的內角平分線，再加上外角平分線，是相對容易理解的知識。

以下則是一個相關的應用，足以令讀者感受到它的威力。

題目：已知四邊形 $ABCD$ 中， AC 、 BD 是對角線。若 $\angle ABD = 30^\circ$ ， $\angle ADB = 70^\circ$ ， $\angle CBD = 75^\circ$ ， $\angle CDB = 55^\circ$ ，求 $\angle BAC$ 的大小。



這題看上去似乎非常簡單，但稍作嘗試後，讀者就會發現，僅僅是在這幾個角度之間來來回回的計算，是很難求出 $\angle BAC$ 的大小的。但若我們利用三角形的旁心性質去計算的話，便超級簡單了。只需分別延長線段 AB 及 AD 至點 E 及 F ，不難發現 $\angle CDF = \angle CDB = 55^\circ$ ， $\angle CBE = \angle CBD = 75^\circ$ ，即 CD 及 BC 分別為 $\angle BDF$ 及 $\angle DBE$ 的角平分線。

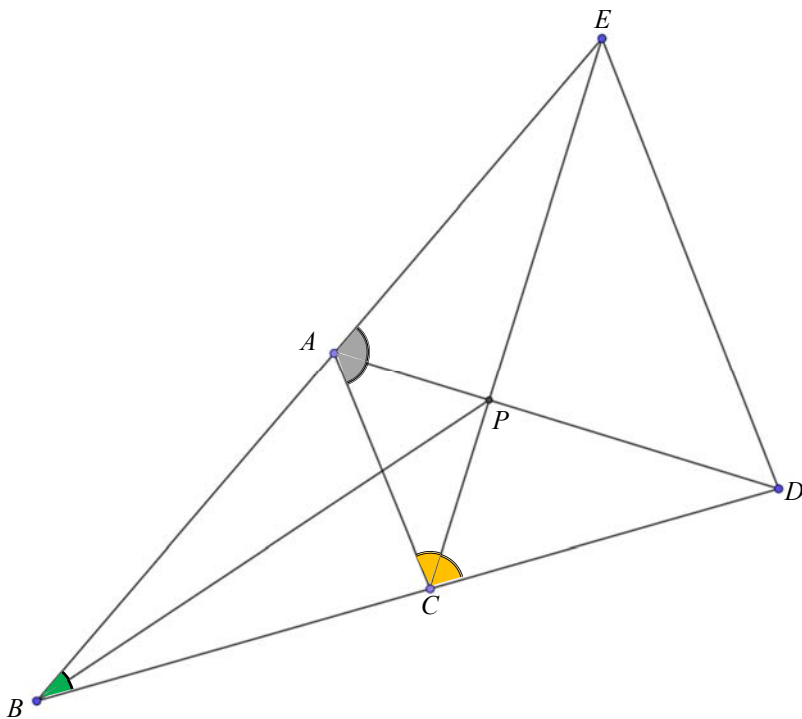


因此， AC 也是 $\angle BAD$ 的角平分線。由於 $\angle BAD = 180^\circ - \angle ABD - \angle ADB = 80^\circ$ ，

所以， $\angle BAC = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$ 。

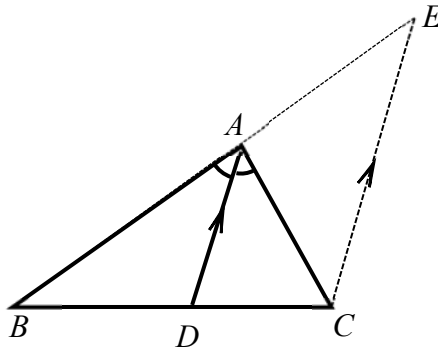
延伸問題:

在圖三中，若 CP 和 BA 延長相交於一點 E 及 AP 和 BC 延長相交於另一點 D ，同時， $AP:PD=CP:PE$ ，可否只運用角平分線定理證明 $\triangle BDE$ 是一個等腰三角形？



圖三

首先，我們有角平分線定理^[5]的證明：



圖四

圖四為內角平分線，而圖五則為外角平分線。對於圖四，給定的 $\triangle ABC$ ，若 $\angle BAC$ 的內角平分線與 BC 交於 D ，則

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}。$$

作圖：作 $CE \parallel DA$ 且與 BA 延伸相交於點 E 。

由於 $CE \parallel DA$ 且 AC 是一截線，我們有

$$\angle DAC = \angle ACE \text{ (內錯角, } CE \parallel DA) \dots\dots (1)$$

$$\angle BAD = \angle AEC \text{ (同位角, } CE \parallel DA) \dots\dots (2)$$

同時， AD 是 $\angle BAC$ 的角平分線，因此， $\angle BAD = \angle DAC \dots\dots (3)$

由 (1)、(2) 及 (3) ，我們有 $\angle ACE = \angle AEC$

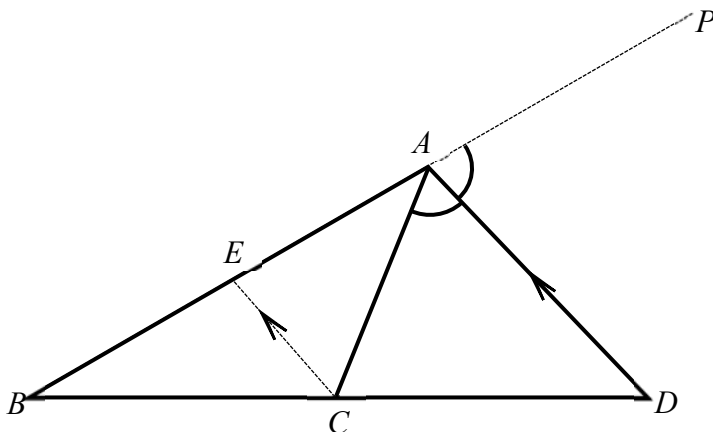
因此，對於 $\triangle ACE$ ， $AE = AC$ （等角對邊相等）

對於 $\triangle BCE$ ，由於 $CE \parallel DA$ ，利用一般化截線定理，

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AE}。$$

再者， $AE = AC$ ，

因此， $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ 。



圖五

至於外角平分線，如圖五所示，對於 $\triangle ABC$ ，設 AD 是 $\angle BAC$ 的外角平分線且相交 BC 延伸於點 D 。這裡，我們

仍須證明 $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ 。

作圖：作 $CE \parallel DA$ 且相交 AB 於點 E 。

由於 $CE \parallel DA$ 且 AC 是一截線，我們有

$$\angle ECA = \angle CAD \text{ (內錯角, } CE \parallel DA) \dots\dots (1)$$

$CE \parallel DA$ 且 BP 是一截線，我們有

$$\angle CEA = \angle DAP \text{ (同位角, } CE \parallel DA) \dots\dots (2)$$

同時， AD 是 $\angle CAP$ 的角平分線，因此 $\angle CAD = \angle DAP \dots\dots (3)$

綜合 (1)、(2) 及 (3)，我們有 $\angle CEA = \angle ECA$ ，所以 $AE = AC$ (等角對邊相等)

在 $\triangle BDA$ 中，由於 $EC \parallel AD$ ，利用一般化截線定理， $\frac{BC}{CD} = \frac{BE}{AE}$

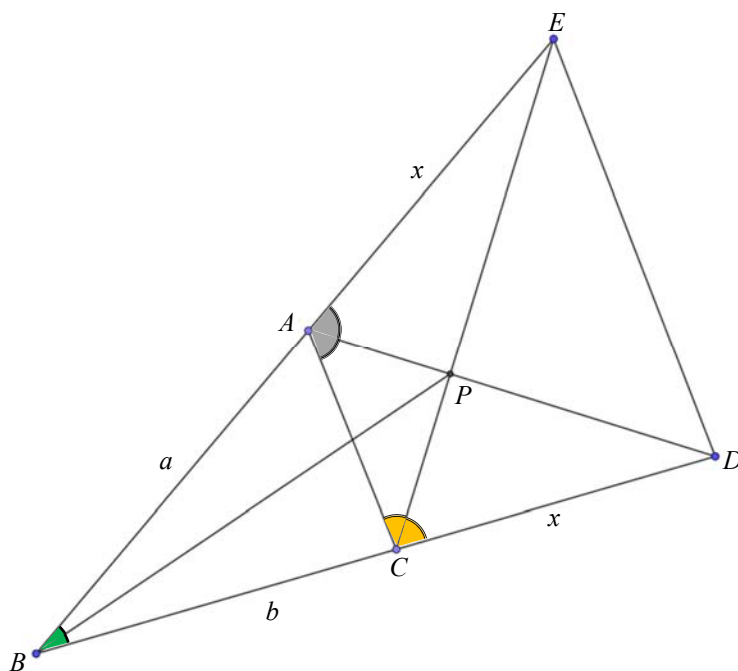
$$\frac{BC + CD}{CD} = \frac{BE + EA}{AE}$$

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AE}$$

再者， $AE = AC$ ，因此 $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ 。

證畢。

由此，延伸問題的證明如下：



對於 $\triangle ACE$ ，因 AP 是角平分線，運用角平分線定理，

$$\frac{AC}{AE} = \frac{CP}{PE}$$

對於 $\triangle ACD$ ，因 CP 是角平分線，運用角平分線定理，

$$\frac{AC}{CD} = \frac{AP}{PD}$$

$$\therefore \frac{AP}{PD} = \frac{CP}{PE}$$

$$\therefore \frac{AC}{AE} = \frac{AC}{CD} \quad \text{得 } AE = CD$$

設 $AE = CD = x$ ， $AB = a$ ， $CB = b$

對 $\triangle BCE$ ，因為 BP 是角平分線，運用角平分線定理，

$$\frac{b}{a+x} = \frac{CP}{PE}$$

對 $\triangle BAD$ ，因為 BP 是角平分線，運用角平分線定理，

$$\frac{a}{b+x} = \frac{AP}{PD}$$

$$\therefore \frac{b}{a+x} = \frac{a}{b+x} \quad \text{得 } b^2 + bx = a^2 + ax$$

$$(b-a)(b+a) + (b-a)x = 0$$

$$(b-a)(b+a+x) = 0$$

$$\therefore a = b \quad \text{或} \quad x = -(a+b) \text{ (捨去)}。$$

得 $BE = BD$

$\triangle BDE$ 等腰。

證畢。

參考資料

- [1] Byjus. *Laws of Tangents*. Bangalore: Think & Learn Pvt Ltd. Retrieved from <https://byjus.com/maths/law-of-tangents> on 25 August 2023.
- [2] Corral, Michael. 2.4: The Area of a Triangle. California: Libretexts Libraries publishing. Retrieved from [https://math.libretexts.org/Bookshelves/Precalculus/Elementary_Trigonometry_\(Corral\)/02%3A_General_Triangles/2.04%3A_The_Area_of_a_Triangle](https://math.libretexts.org/Bookshelves/Precalculus/Elementary_Trigonometry_(Corral)/02%3A_General_Triangles/2.04%3A_The_Area_of_a_Triangle) on 25 August 2023.
- [3] 香港課程發展委員會（1985）。中學課程綱要—數學科課程綱要（中一至中五適用）。香港：香港課程發展委員會。
- [4] 李柏良。三角形旁心定理。摘自 http://www.mathsgreat.com/geom_th/geom_th_033b.pdf。
- [5] 李柏良。三角形角平分線定理。摘自 http://www.mathsgreat.com/geom_th/geom_th_073.pdf。

設計初中數學建模活動的經驗分享

鍾永康、楊俊賢

華仁書院 (九龍)

前言

現時教育局要求所有接受公帑資助的中學須安排最少一位數學科教師在 2025/26 學年完結前完成總計 18 小時的「中學數學教師數學建模增潤證書課程」(詳見教育局通函第 187/2024 號¹)。同時，不少同工亦邀請筆者推介一些適合初中之數學建模活動以供參考。筆者自問不是數學建模之專家，不過藉著多年參與師資培訓及編寫教材之經驗，希望在此分享一些設計初中數學建模活動的經驗。

適合初中學生之數學建模示例

現時不少中學數學建模活動多數均涉及高中數學必修部分的知識 (例如函數、概率、線性規劃) 甚至是延伸部分的知識 (例如微積分、矩陣、線性代數)，難以引入初中數學課堂中。不過，其實還是有一些適合初中學生之數學建模活動，下表是一些教育局的示例：

¹ 網址為

<https://applications.edb.gov.hk/circular/upload/EDBCM/EDBCM24187C.pdf>

示例	來源
有關香港旅客住宿需求的數學建模	教育局數學教育組網站 (教學資源 - STEAM 示例 ²)
暖包的數學建模	
Paper packed drink (只有英文版)	協作研究及發展(「種籽」)計劃 - 將數學建模注入中學數學科以 推展 STEAM 教育(MA0623) ³
Split taxi fare (只有英文版)	

除了上述示例外，教育局數學教育組亦持續與不同中學合作設計數學建模活動，相信不久將來會有更多示例可供同工參考。另外一些海外網站亦有不少數學建模活動之資源免費供大眾參閱，其中筆者推介 International Mathematical Modeling Challenge (簡稱 IM²C 或 IMMC) 的相關資源⁴，當中有一些高小至中學程度之數學建模活動示例，並且每個示例均詳細展示如何分析問題，並作出合理假設，然後運用數學建模去尋求解題結果。其中一個例子是探究「為甚麼小童較易中暑」，學生可嘗試使用不同大小的立方體去模擬小童、青少年及成年人的體格，然後透

² 網址為 <https://www.edb.gov.hk/tc/curriculum-development/kla/ma/res/STEMexamples.html>

³ 網址為 <https://www.edb.gov.hk/tc/curriculum-development/major-level-of-edu/seed/whatsnew-2023-24/index.html>

⁴ 網址為 <https://www.immchallenge.org.au/supporting-resources>

過體積、表面面積公式去分別估算他們之立體體積及表面面積及其比，從而推算不同體格的人當遇上高溫時之脫水情況。而另一個例子則是探究「一座大樓如果遇上緊急情況下需要疏散所有住客之所需時間」，當中已知大樓的單位數量、層數、電梯數量及樓梯數量，學生需要運用上述資訊加上一些假設（例如位於低層及高層住客所採用疏散方式或有所不同），從而建立一條數學公式去估算疏散時間。上述這些數學建模活動只涉及初中數學的知識，並且運算較為簡單，適合作為初中數學課堂活動或是專題研習之用。

另外值得一提的是 IM²C 每年均會舉辦國際性的數學建模競賽，2024 年的題目是“Picking the Perfect Pet”，要求參賽者建立一個數學模型用來評估一個家庭是否準備好養寵物，最終香港培僑書院於全球共 36 個地區中脫穎而出獲得最高殊榮，其學生考慮不同家居附近之寵物設施數量、家居衛生、家庭購買力、家庭成員可以陪伴寵物時間等因素作出合理假設及量化上述因素，從而建立一個數學模型。雖然箇中涉及不少高等數學知識，不過整個建模過程甚有條理且精彩，值得各位對數學建模有興趣的同工參閱⁵。

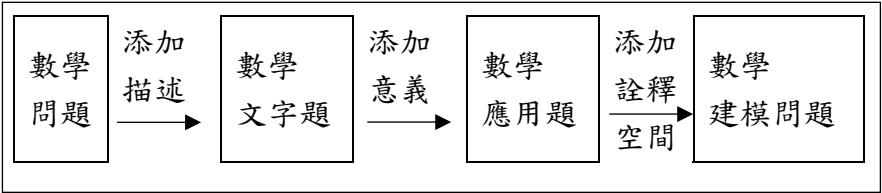
自行設計初中學生之數學建模活動

數學建模多數建基於日常生活情景，不過數學建模問題與傳統的數學日常生活應用題有著本質上的差異（王海华，2024），詳見下表：

⁵ 網址為 <https://www.immchallenge.org/Contests/index.html>

傳統的數學應用題	數學建模問題
問題經過人為加工及提煉，呈現出一種理想狀態，已給條件是充分的	問題直接來自實際生活，其數據具隨機性，已給條件往往不清晰及不充分
可直接分析問題並透過運算尋求答案	於分析及解決問題前，需要對問題中的某些條件進行合理假設，以使問題更加明確
只需確定運算過程正確並滿足已給條件，便能肯定結果正確	除了需要驗證結果正確外，還要考慮結果是否與實際情況吻合，否則便要改進甚至重建模型進行求解

總括而言，數學建模問題多數不具備清晰及充分的已給條件，從而需要學生嘗試對現實問題進行分析及理解。而 Ang (2001) 則指出建模活動其中一個特色就是將數學應用放在日常生活情境中，並且著重於探究數學如何存在於該些情境中。所以若我們希望設計初中數學建模活動，可以嘗試參考上述觀點，並參考 Bliss & Libertini (2019) 的建議，將一些日常生活問題添加更多描述和意義，考慮為學生提供詮釋問題的空間並讓他們在解決過程中有所選擇，從而將傳統的數學應用題轉化為數學建模問題。



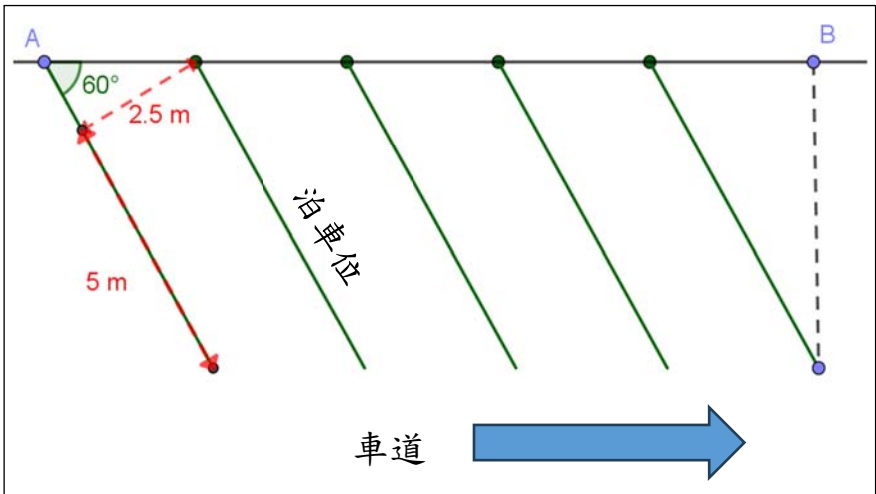
圖一：將數學問題轉化為數學建模問題 (Bliss & Libertini, 2019)

接下來，筆者嘗試透過一些實例展示如何將傳統的數學應用題轉化為初中數學建模活動。

例子一：泊車位設計 (Parking Space Design)

以下是一道有關初中三角學的應用題：

「下圖中顯示了4個於車道旁的泊車位，其泊車角度為 60° ，而每個車位可供長5米、闊2.5米的車輛停泊在內。求所有車位共佔的道路長度 (即圖中AB的長度)。」



這是一道傳統的數學問題，其中已給的條件充份，學生共需正確運用三角比即可求得答案。那麼怎樣可以將此題目轉化成數學建模活動呢？首先我們可以為此題添加描述及意義。例如我校於校舍旁規劃了停泊車輛的位置供教職員使用，筆者便嘗試邀請中二級學生探究現有的規劃是否最大限度地利用了停車空間。首先筆者向學生展示日常生活中泊車位的不同種類（見下表）：

泊車角度	泊車方法
0°	
60°	

泊車角度	泊車方法
90°	

透過初步運算，學生不難發現泊車角度越大（最大為 90°），其所佔的道路長度則越短，教師可著學生繪製圖表以研究兩者之間的關係。除了道路長度外，泊車角度亦會影響車道所需之闊度，泊車角度不同，車輛泊車時所需之轉彎半徑 (turning radius) 亦會不同。雖然計算轉彎半徑只涉及初中數學知識，不過計算過程較為複雜，因此筆者亦有直接引用屋宇署有關私家車停車場通道之建議闊度⁶ 讓學生作參考 (見下表)：

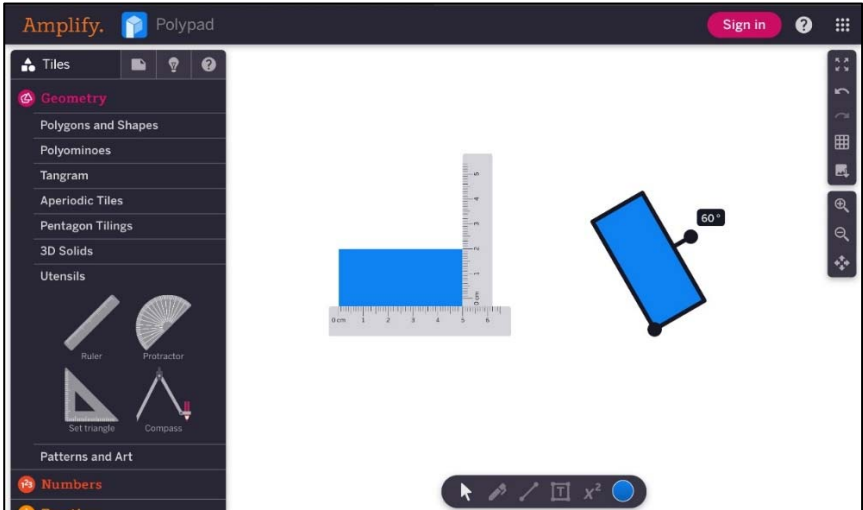
泊車角度	30	45	60	70	80	90
理想通道闊度 (米)	3	3.6	4.2	4.7	5.3	6

⁶ 屋宇署 《停車場及上落客貨設施的設計》

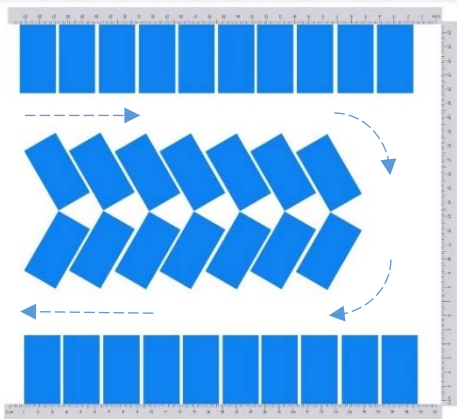
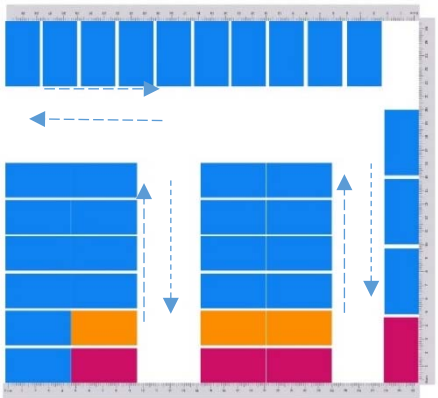
<https://www.bd.gov.hk/doc/tc/resources/codes-and-references/practice-notes-and-circular-letters/pnap/APP/APP111.pdf>

透過添加上述描述，學生便能明白泊車位的泊車角度會同時影響其所佔的道路長度及闊度。換言之，若已知停車場的大小及形狀，如何善用不同泊車角度規劃停車位從而最大限度地利用了停車空間便是此泊車位設計問題的意義及價值。最後筆者便著學生分組並重新設計學校的停車空間，並匯報其設計所涉及的考慮（除了不同車位的泊車角度外，部份學生亦有考慮預留特別車位，以供某些較大型之車輛如貨車作暫時停泊之用），每組學生均有自己詮釋問題的方式，並於解題過程中有不同的選擇。整個建模活動由學生初步運算一組泊車位（4 至 8 個），若採用不同泊車角度其所佔的道路長度及闊度開始，然後每組逐步嘗試規劃學校的停車空間並作分組匯報，最後每組再參考其他組別的設計及教師回饋，以完善自己的設計為終結。此外學生亦可準備自攜裝置 BYOD 使用 PolyPad⁷，它提供構作簡單幾何形狀的工具，並且附有不同尺規工具，以便學生更容易構作不同種類的泊車位：

⁷ 網址為 <https://polypad.amplify.com/p>。此軟件亦可透過 App Store 免費下載。



當學生完成重新規劃學校的停車空間後，教師可鼓勵學生評價不同組別的設計。除了泊車位數目外，整體泊車位的使用方便程度 (accessibility) 亦可作為其中一個考慮因素。那麼如何評價一個泊車位的使用方便程度？這便是一個空間讓學生自行詮釋。若假設每個泊車位的使用方便程度最高為 1，最低為 0，學生便可以透過自行建議的標準為整體停車空間作評分，例子如下：

停車場規劃平面圖	平均使用方便程度
 <p data-bbox="113 772 583 807">每個泊車位均方便使用，得分為 1</p>	$\frac{1 \times 34}{34} = 1$
 <p data-bbox="113 1321 583 1401">位於角落的泊車位不方便使用，得分介乎於 0.4 至 0.8</p>	$\frac{1 \times 31 + 0.8 \times 3 + 0.6 \times 3 + 0.4}{38}$ ≈ 0.937

除了泊車位的使用方便程度外，學生亦可以自行建議為不同項目作評分，例如車道規劃，出入口設計等。雖然整個活動只涉及簡單之運算，但其中的 STEAM 及數學建模元素卻相對豐富。

例子二：無障礙斜道設計 (Ramps Design)

以下是另一道有關初中三角學的應用題：

「某斜道之斜率為 1:12 及其水平距離為 100 米。若某人以每秒 2 米的速度行走，求他行走整段斜道所需之時間。」

筆者便曾經將此問題轉化為建模活動，並要求中三級學生為學校設計一條通往籃球場的無障礙斜道（我校籃球場位於斜坡但只有樓梯能夠到達）。首先，筆者向學生描述設計一條無障礙斜道所需符合之要求，根據屋宇署有關斜道之指引⁸，斜率應介乎於 1:20 到 1:12。



⁸ 屋宇署《設計手冊：暢通無阻的通道 2008（2024 年版本）》。

網址：https://www.bd.gov.hk/doc/en/resources/codes-and-references/code-anddesign-manuals/BFA2008_e.pdf

此外，如斜道的斜率大於 1:20，則須於每 10 米或不足 10 米的斜道地平線長度設有不少於 1.2 米長的平台。如何於固定的空間中設計出一條合規劃的斜道方面不同使用者，便是這道問題所賦予之意義：「由學校足球場至籃球場需經過一條高度為 1.8 米的樓梯。如果你要設計一條無障礙斜道以取代樓梯，而可用工地範圍為 10 米乘 8 米的長方形，請以平面圖展示你的設計。」

不過，若只要求學生建基於已知條件設計出一條符合限制 (constraints) 之斜道，這道問題便像是一道工程設計問題多於數學建模問題。因此，筆者亦要求學生估算不同使用者 (包括使用拐杖及輪椅人仕) 使用其設計之斜道所需的行走時間。除了上坡及下坡所需時間不同外，若斜道涉及平台或是轉彎位置，所需時間亦要作特別考慮。由於學生沒有機會嘗試使用拐杖或輪椅行走不同斜率斜道所需之時間，所以他們至少要自行尋找方法估算以下參數：

參數	平地	1:20	1:15	1:12
上坡速度	v_f	v_{u20}	v_{u15}	v_{u12}
下坡速度		v_{d20}	v_{d15}	v_{d12}

基於課堂時間所限，筆者最後只要求學生分組匯報其設計之無障礙斜道平面圖及估計不同使用者走畢斜道所需之時間，能夠讓學生詮釋問題的空間並不是太多，而各組學生所給出的結果亦大同小異。如果有更多時間，筆者會著學生嘗試建立一個數學模型用來評估不同人仕使用斜道之滿意度。當高度固定不變

時，斜道之斜率越大，其長度則越短，使用者走畢全程所需之時間亦會越少，這或會提昇使用者之滿意度；不過同時斜率越大會令使用拐杖及輪椅人仕上坡時多耗體能、下坡時難於控制速度，甚或者會使輪椅有前傾後仰翻覆的危險，從而減低使用者之滿意度。讓學生就著使用斜道的滿意度有更多詮釋問題的空間並讓他們在解決過程中有所選擇，就是數學建模活動之其中一個重點。

結語

數學建模問題大致上可分為四大類型，分別是描述與理解 (Description)、測因及解釋 (Explanation)、估計與預測 (Estimation) 和評價及決策 (Evaluation and Decision) (王海华，2024)，筆者於文中提及的例子便是屬於評價及決策。其實筆者亦有於初中數學課堂嘗試引入其他類型的數學建模活動，例如著學生預測香港電動汽車數量之增長 (這亦是2024中學生數學建模比賽 (MMCSS) 的題目)、分析不同因素 (例如性別、學歷、居住地區) 對個人工作收入有甚麼影響等。不過當中涉及一些高中知識，例如自變量及應變量的概念、不同類型函數的應用等，因此不在此文中論述。最後筆者希望從不同的例子中說明數學建模不只是對現實系統的簡單的複製和模擬，而是經過對現實現象進行分析、提煉、歸納、昇華的結果，是以數學語言來正確地描繪現實物件的基本內在特徵，並通過數學上的演繹推理和分析去求解。而針對實際問題構建數學模型的過程，能培養學生使用數學語言對實際現象和實際問題進行近似刻畫，以便於更深刻地認識所研究的物件。這個過程是數學建模的其中

一個重點，亦是傳統的數學應用題不能給予學生之學習經歷。若我們能於初中便開始讓學生體會數學建模之過程，相信更能提昇學生真正應用數學於日常生活上的能力，或至少減低學生對「為甚麼我們（人類）要學習數學？」的疑惑。

參考資料

- [1] 王海华 (2024)。《模型，就是数学化的思维》。哈尔滨：哈尔滨出版社。
- [2] Ang, K.C. (2001). Teaching mathematical modelling in Singapore schools. *The Mathematics Educator*, 6(1), 63-75.
- [3] Bliss, K. & Libertini, J. (2019). What is Mathematical Modeling? In Garfunkel, S. and Montgomery, M. (Ed.) *GAIMME: Guidelines for Assessment and Instruction in Mathematical Modeling Education (2nd Edition)*, 7-22. Philadelphia: COMAP and SIAM.
- [4] Galbraith, P., & Holton, D. (2018). *Mathematical Modelling: A Guidebook for Teachers and Teams*. Australian Council for Educational Research.

探討小學二年級「四邊形」的學與教

廖文慧

香海正覺蓮社佛教正慧小學

一、引言

2021-2022 年度，本校數學科參加了教育局課程支援分部數學教育組的「種籽計劃」，主題為「探索與發展在小學數學修訂課程的學與教和評估中照顧學生的多樣性的策略」。參加「種籽計劃」能配合校本課程發展，提升教師的教學專業，讓學生的學習更有成效。教育局數學教育組的課程發展主任與我們共同備課，探討教授修訂課程的較佳方法。

本校二年級教師選取了「四邊形」作為「種籽計劃」的探討單元，本文旨在介紹參加此計劃期間所用的教學方法及學生的整體學習表現。

二、設計理念

配合校本課程發展，全體數學教師皆認同將「照顧學習多樣性」定為首要目標。修訂的小學數學課程改革，著重實踐經驗，在溝通能力、數學能力、運用資訊科技能力上作出綜合運用。至於選取圖形與空間範疇的主要原因，是因為課堂上出現的學習多樣性，在此範疇的表現比較明顯。在「四邊形」學習過程中，教師希望初小學生能夠透過分析討論，自行發現正方形及長方形的各種特性，再逐步掌握繪畫正放和斜放正方形，特別是繪

畫斜放的正方形，屬於一個學習難點，一向令學生較易出現挫敗感。藉著參加「種籽計劃」，希望能讓學生掌握繪畫斜放正方形的技巧，為學生將來學習繪畫其他四邊形時建立良好的基礎。邢克鳳(2007-2008)指出：「小學數學中的概念、法則、公式等不是按照書本的記憶，也不是只聽教師的講解，而應讓學生在生活中體驗，在體驗中理解，在理解的基礎上用數學語言表達、概括才能使學生多方面的能力在學習中得以增長」。在整個單元設計的過程中，教師運用不同的教學策略以照顧學生學習多樣性，從而提升教學效能。

三、學習過程

教授 2S4 四邊形(一)整個學習單位，學校共編定了 6 節課堂，我們使用了各式各樣的活動，包括個人、二人一組及三至四人一組的小組活動，由教師指導學生進行學習活動，並適時作出回饋。教師亦採用互動式的學習活動，透過分享讓同學們互相觀摩學習，加深學生對課題的認識。另一方面，互動式的學習活動亦能讓教師即時了解學生所遇到的問題，並盡快作出跟進。科任教師記錄了學生進行課堂活動時遇到的學習難點及其處理方法，並與同級科任教師分享，這有助給予其他班別參考及調適，例如第一班學生在學習繪畫斜放正方形時遇到的學習難點，可作為另一班的借鏡，並對教學活動作出調整以提高教學成效。

以下會詳細介紹各個學習活動及相關流程。

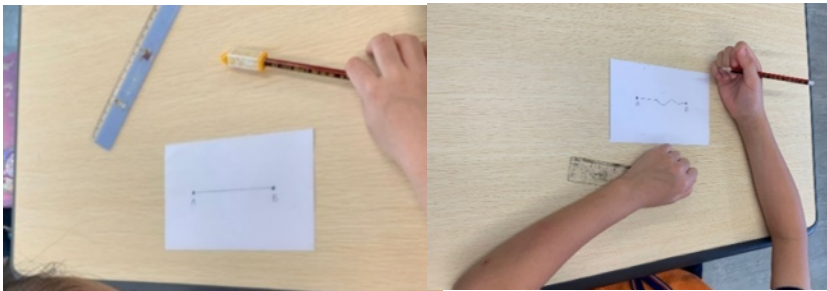
活動一：認識線段的概念，包括認識連接兩「端點」的線段和曲

線中，線段的長度最短。

形式：個人活動

點對點畫線段：

教師派發一張紙，紙上有 A 和 B 兩點，請學生連接兩點（學生可自由選擇是否使用直尺），及後著學生觀察用並引導學生發現用直尺畫出 AB 的長度是最短，其他線段的長度不會比 AB 短，教師可透過此活動帶出「線段」是直線的一部分，而四邊形是由四條線段所組成。從而帶出學生須培養運用直尺繪畫四邊形的習慣。



活動二：認識四邊形中的對邊和鄰邊的概念

形式：四人一組的小組活動

1. 辨別四邊形：

教師提供一些平面圖形，例如：三角形、四邊形和五邊形，先讓學生辨別出四邊形，並解釋原因。學生解釋時要說出及指出圖

中四邊形是由哪四條線段所組成。

2. 牽手活動:

4 位學生一組，互相手牽手，每位學生代表四邊形中的一條線段，線段給予名稱 AB、BC、CD 和 DA，學生要找出與自己組成的對邊與鄰邊。

學生自行口述:「在四邊形 ABCD 中，AB 的對邊是 DC，AB 和 DC 是一組對邊，AD 的對邊是 BC，AD 和 BC 是另一組對邊。」，從而學會「對邊」的概念，並總結「我們這個四邊形有 2 組對邊」。

學生自行口述:「在四邊形 ABCD 中，AB 的鄰邊是 AD 和 BC，BC 的鄰邊是 BA 和 CD。」，從而學會「鄰邊」的概念，並總結「我們這個四邊形有 4 組鄰邊」。



活動三: 介紹長方形及正方形

(建議正方形和長方形分成兩個活動處理，以避免學生在四年級學習四邊形之間的包含關係時會產生誤解。)

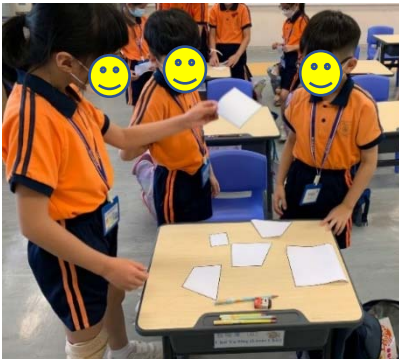
形式: 三人至四人一組的小組活動

教師為每組學生分發數個四邊形，再着學生直觀把它們分類。

(正方形 + 其他四邊形，例如梯形、平行四邊形)

(長方形+其他四邊形，例如梯形、平行四邊形)

學生在桌上展示分類結果，並讓學生運用數學語言(對邊、鄰邊、直角、長度等數學詞彙)為分類結果進行解說，教師再按學生的解說作出指導及回饋。



活動四：認識正方形及長方形的特性

形式：三人至四人一組的小組活動

正方形對摺活動：同學一起把正方形手工紙對摺，對邊重疊後讓學生觀察長度是否相等，然後再著學生把鄰邊重疊，並觀察長度是否相等，從而讓學生發現正方形的四邊長度相等。接著，學生利用三角尺或其他工具量度正方形的四個角，觀察它們是否直角，從而讓學生發現正方形的四個角都是直角。學生匯報觀察結果並得出結論：正方形的基本性質包括四邊長度相等，以及四個角都是直角。

長方形對摺活動:同學一起把長方形紙對摺，對邊重疊後讓學生觀察長度是否相等，然後再著學生把鄰邊重疊，並觀察長度是否相等，從而讓學生發現長方形有兩組對邊長度相等。接著，學生利用三角尺或其他工具量度長方形的四個角，觀察它們是否直角，從而讓學生發現長方形的四個角都是直角。學生匯報觀察結果，並得出結論:長方形的基本性質包括兩組對邊長度相等，以及四個角都是直角。

(以上兩項活動目的是給予不同能力學生透過實作活動觀察，說出正方形及長方形的基本性質。)



活動五:

繪畫斜放正方形

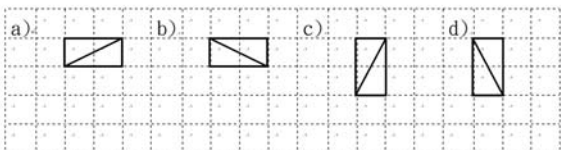
第一部份:

形式: 二人一組的小組活動

讓學生先觀察例子，看看框中線段所佔的格數(橫佔多少格? 直佔多少格?)，然後繪畫其他題目的線段及填上格數。

例:-

橫佔 2 格	橫佔 2 格	橫佔 1 格	橫佔 1 格
直佔 1 格	直佔 1 格	直佔 2 格	直佔 2 格



學生匯報:觀察每條線段鄰邊框出的格數,橫佔和直佔的格數會重複出現,而線段的畫法是有規律地重複出現的。

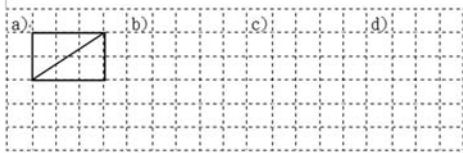
(1)

橫佔 ___ 格	橫佔 ___ 格	橫佔 ___ 格	橫佔 ___ 格
直佔 ___ 格	直佔 ___ 格	直佔 ___ 格	直佔 ___ 格



(2)

橫佔 ___ 格	橫佔 ___ 格	橫佔 ___ 格	橫佔 ___ 格
直佔 ___ 格	直佔 ___ 格	直佔 ___ 格	直佔 ___ 格



第二部份:

形式: 二人一組的小組活動

1. 讓學生先想一想框出圖中兩條線段的格數(橫佔多少格? 直佔多少格?), 根據提供的兩條線段(AB 和 BC)框出格數, 再填上線段所佔的格數。

線段 AB:

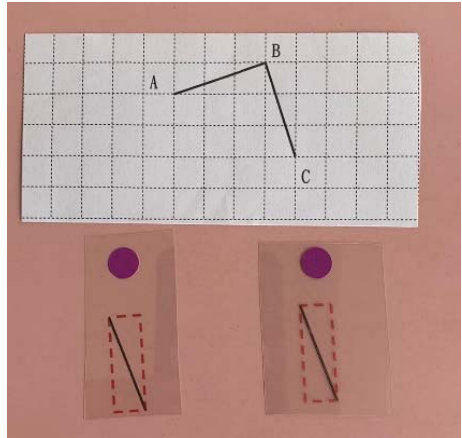
橫佔: 3 格

直佔: 1 格

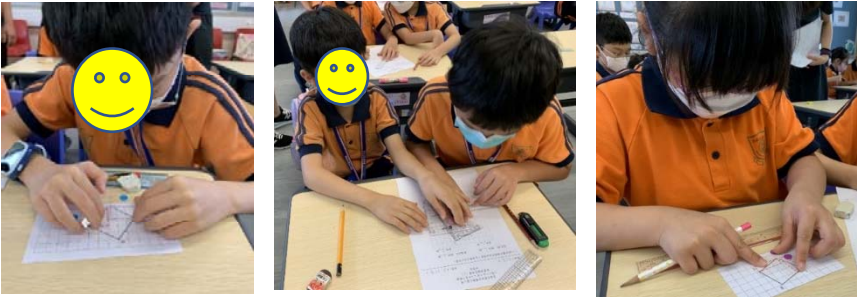
線段 BC:

橫佔: 1 格

直佔: 3 格



2. 繪畫另外兩條線段, 先觀察對邊線段的「方向」, 然後「框出」及「填上所畫線段的格數」, 畫出正方形 ABCD。(教師會派發膠片給有需要的學生, 學生可以利用膠片輔助思考繪畫方法。)
3. 運用工具檢查所繪畫的圖形的四個角是否都是直角。
4. 教師在實物投影機展示學生, 並與學生討論如何檢測此圖形是否一個正方形, 期望能引導學生說出:
- 斜放正方形的對邊: 橫和直所佔格數相同
 - 對邊方向相同
 - 四個角也是直角
5. 學生匯報: 觀察每條線段鄰邊框出的格數, 橫佔和直佔的格數會重複出現, 而線段的畫法是有規律地重複出現的。學生要根據已提供的線段, 先找出其對邊橫佔和直佔的格數, 再加線段, 最後形成一個正方形。



第三部份:

形式: 二人一組的小組活動

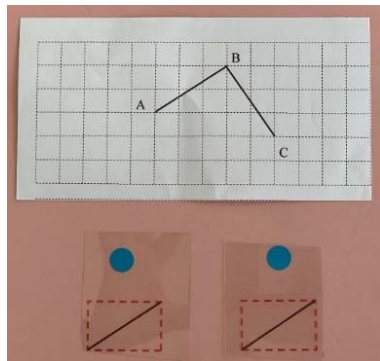
1. 先想一想框出圖中兩條線段的格數(橫佔多少格? 直佔多少格?), 根據提供的兩條線段(線段 AB 和線段 BC)框出格數, 再填上線段所佔的格數。

線段 AB:

- 橫佔: 3 格
- 直佔: 2 格

線段 BC:

- 橫佔: 2 格
- 直佔: 3 格



2. 繪畫另外兩條線段, 先觀察對邊線段的「方向」, 然後「框出」及「填上所畫線段的格數」, 畫出正方形 ABCD。(派發膠片給部份有需要的學生, 可以利用膠片輔助思考繪畫方法。)

3. 驗證正方形的直角
4. 全班討論:教師將學生作品在實物投影機展示,並與學生討論,並說出:
 - 斜放正方形的線段:橫和直所佔格數相同
 - 對邊方向相同
 - 四個角也是直角

學生匯報:

觀察每條線段鄰邊框出的格數,橫佔和直佔的數目會重複出現,線段的畫法是有規律地重複出現。根據已提供的線段,先填上數字,再加上其餘線段,畫成一個正方形。

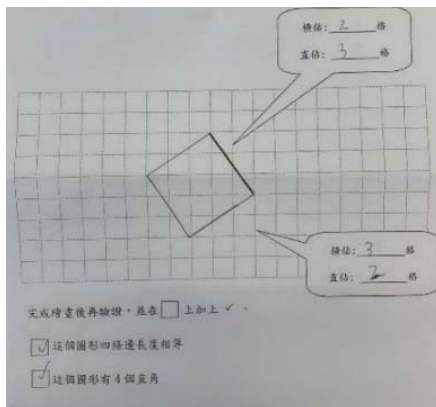
總結出繪畫斜放正方形的步驟:

1. 框出提供的線段
2. 找出線段中橫和直所佔的格數
3. 觀察提供的線段的方向
4. 畫出線段
5. 運用工具檢查圖形是否有四個直角

第四部份:

形式: 個人活動

課業上只提供斜放正方形的其中一條邊，學生加畫三條線段，以形成一個正方形，並運用工具檢查圖形是否有四個直角，教師再作出適當的回饋。



四、教學實踐反思

1. 重視對概念的理解和掌握

初小學生的特性是對事物好奇，喜愛參與學習活動，大部份初小學生對學習數學充滿興趣，很期待課堂上可以進行實作活動。透過有趣的實作活動可以令學生更加投入。因此，教師可設計不同的學習活動給學生，即使學生能力有差異，大部份學生亦會勇於嘗試，令學習較易取得成效。此外，學習期間要讓學生有互相合作及發揮所學的機會，例如以強帶弱。同時，教師可由重溫學生的已有知識，並從中引伸至學習基礎知識，這有助照顧學習差異。適當地提供一些學習工具去輔助學生理解，亦會讓學生更易獲得成功感。

2. 教學活動的設計要配合初小學生的學習需要

大部份活動需要分組進行，令到每位學生能認真參與，日後對四邊形的印象亦會較深刻。上述的教學設計提供了足夠的時間

讓學生進行解說，這有助學生掌握及運用數學詞彙。學生透過表達，學會適當運用數學詞語，能準確形容四邊形中兩條邊的關係，如 AB 的鄰邊是 BC 或「這一組對邊包括 AB 及 CD」。而膠片的設計能幫助未能正確畫出四邊形的學生完成繪畫以提升他們的自信心。此外，能力稍遜的學生亦樂於參與各項學習活動，對處理照顧學習多樣性有一定幫助。

3. 教師專業交流

在集體備課時，教師能因應教學經驗及教學設計發表意見，並反思學生的學習需要，令教師設計的教學活動更重視照顧學生的不同學習需要。教師們十分認同「種籽」計劃的目標，本校期望透過「種籽」計劃讓數學科教學團隊有機會進行更多的協作研究，發展照顧學生學習多樣性的有效學與教策略和評估方法，以提升學生學習數學的興趣及發展他們的共通能力。其他課題的教學設計，同樣能夠按學生的學習能力調適內容，設計不同學習活動。

五、總結

我們得到教育局人員的專業支援，加強了同級教師之間的專業交流，集思廣益，並建立數學科的協作文化，促進教師專業發展。在日後的數學科備課會議中，我們更懂得透過設計教學活動及制定教學策略，讓學生的學習更有成效。

參考資料

- [1] 邢克鳳(2007-2008)。《在數學教學中培養學生語言表達能力》。數學教學-實踐與探索(二), 172-180。

談談先乘除後加減

劉國賢

退休數學教師

引言

三年多的疫情雖然已經完結，學校亦復課了一段頗長的時間，但對同學的學習影響現在才慢慢的浮現，筆者感覺同學們上了三年數學的網課後，對基礎數學的概念似有倒退跡象，導致有些中學的同學對基礎數學知識未能牢牢掌握。相信很多中學數學教師都曾遇過學生問一些頗基礎的數學問題，而這些問題往往比屬中學的數學課題的問題更難解答。

筆者記得多年前觀了一堂中六的數學課，該課的內容已忘記了，但印象很深的是當時有一位同學突然間戰戰兢兢的問教師為什麼要先乘除後加減。雖然當天教師已經處理得很好，但可能教師因為受觀課的影響，他並不想花時間詳細講解，以免影響該課的教學進度。因此，筆者懷疑該同學最後可能仍是不明白為何要先乘除後加減。

雖然這只是一個極端及個別例子，因為只有極少數同學會在高中階段問數學教師這樣的問題，但我們也要預備好萬一遇到學生問這些問題時如何回答，否則只叫學生死記硬背，多練習，肯定會對學生有不良影響。

根據由黃毅英教授編輯的**數學百子櫃系列（十四）數學教師不怕被學生難倒了！—中小學數學教師所需的數學知識** 第 11 頁

所述，『為何要先乘除後加減？這其實只是一種約定俗成。一般來說， $a \Delta b \square c$ 沒有說定先做 Δ 還是先做 \square 。尤其在 $(a \Delta b) \square c$ 不同於 $a \Delta (b \square c)$ 之時，也不一定說要按從左到右的順序。但簡略書寫是數學上常見的情況，在數學用語中有所謂“當無混淆情況下可省略”的做法。例如，理論上必須寫 $(3+4)+5$ ，但由於加法滿足結合律，即： $(3+4)+5=3+(4+5)$ ，故可以省略地寫為 $3+4+5$ 。同樣，嚴格意義上來說，我們必須寫 $(3 \times 4) \times 5$ ，但由於乘法符合結合律，即 $(3 \times 4) \times 5=3 \times (4 \times 5)$ ，故可省略地寫為 $3 \times 4 \times 5$ 。其他的還有像 $3a$ 即是 $3 \times a$ 的簡寫。但是對於 $3+4 \times 5$ ，我們就不能隨便省略地書寫。因為不知道它是指 $(3+4) \times 5$ ，還是 $3+(4 \times 5)$ ，而這兩個結果是不相同的。不過，由於大家約定了“先乘除後加減”，故而 $3+4 \times 5$ 習慣上是指 $3+(4 \times 5)$ 。其他的比如 $2\sin^2\theta$ 就是 $2 \times (\sin(\theta))^2$ 的略寫……等等道理與此相同。』

黃教授們已就著先乘除後加減這運算次序解說。筆者想籍著本文分享一些個人的教學經驗，作出一些建議，拋磚引玉，與教師們交流。

根據筆者多年的教學觀察，一般的同學們通常犯以下的錯誤

$$\text{I} \quad 2 + 3 \times 4 = 5 \times 4 = 20$$

$$\text{II} \quad 2 \times \frac{3}{4} = \frac{2 \times 3}{2 \times 4}$$

$$\text{III} \quad 2 \times (3 \times 4) = 6 \times 8$$

$$\text{IV} \quad 2 \times (3 + 4) = 6 + 4$$

$$\text{V} \quad (ab)^2 = ab^2$$

$$\text{VI} \quad (a + b)^2 = a^2 + b^2$$

處理方法

以上的問題可分成兩大類型:

I 要先乘除後加減

II 哪種情況需要分配，什麼時候不能分配

遇到有同學犯這些錯誤，要解答同學們提出的問題，首先要由同學們開始學習數學時說起。同學們在幼稚園學習數學是先唱數、數數(counting)開始，然後是數與量的結合，跟著到加減，之後再學乘除，每階段有鞏固之前所學的意思。總結後主要可分為三個層次：

層次一：加減 (+, -)

層次二：乘除 (\times , \div)

層次三：指數

每進一層有重複上一層多次的意思，例如乘法是重複的加法而除法是重複的減法，例如 $3 \times 4 = 3 + 3 + 3 + 3$ ，因此 $2 + 3 \times 4$ 的意思是 $2 + 3 + 3 + 3 + 3$ ，所以必須先計算 3×4 才會正確。

關於分配問題提醒同學們不一定有括號就要分配，一定要看其層次。例子說明： $2 \times (3 + 4)$ 是將 $3 + 4$ 重複 2 次

$$\begin{array}{ccccccc}
 \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 3 + 4 \\
 & & & + & & & & & \\
 \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 3 + 4
 \end{array}$$

$$2 \times (3 + 4) = 2 \times 3 + 2 \times 4$$

分配情況分析

如何分配，甚麼時候要分配困擾很多數學能力稍遜的同學，亦未有一種非常簡單的法則作直接判斷。筆者嘗試提供一些簡單教學手法，和教師們交流。這方法未必對所有同學皆適合，教師可作參考。

學習重點：運算按從左到右的順序，若個括號外的層次較括號內的層次高一層，在運算時需要分配；其餘情況就不需要分配。

例	運算	括號內 層次	括號外 層次	分配?	正確
I	$2 \times (3 + 4)$	一(加)	二(乘)	要	$2 \times 3 + 2 \times 4$
II	$(ab)^2$	二(乘)	三(指數)	要	a^2b^2
III	$2 \times (3 \times 4)$	二(乘)	二(乘)	不要	6×4 或 3×8
IV	$(a + b)^2$	一(加)	三(指數)	不要	$a^2 + 2ab + b^2$

例 III 解說

$2 \times (3 \times 4)$ 意思是將 3×4 重複加兩次:

$$\begin{array}{ccc}
 3 \times 4 & & 3 \times 4 \\
 \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet & \bullet \\
 \bullet & \bullet & \bullet & + & \bullet & \bullet & \bullet \\
 \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet & \bullet \\
 \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet & \bullet
 \end{array}$$

可以看成 6×4

$$\begin{array}{cccccc}
 \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
 \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
 \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
 \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet
 \end{array}$$

或可看成 3×8

$$\begin{array}{ccc}
 \bullet & \bullet & \bullet \\
 \bullet & \bullet & \bullet \\
 \bullet & \bullet & \bullet \\
 \bullet & \bullet & \bullet \\
 \bullet & \bullet & \bullet \\
 \bullet & \bullet & \bullet \\
 \bullet & \bullet & \bullet \\
 \bullet & \bullet & \bullet
 \end{array}$$

所以不須分配

若出現 $(3a+b)^2$ 括號內是層次一及層次二的運算，那應如何處理？

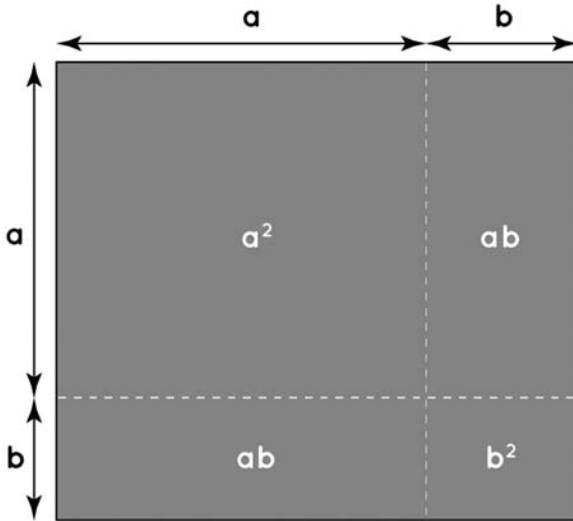
教師可引導同學將 $(3a+b)^2$ 寫成 $(a+a+a+b)^2$ 這樣括號內是層次一，外面是層次三，是不能分配的。又例如 $(a^3b)^2$ ，可看成 $(a \times a \times a \times b)^2$ 這樣括號內是層次二及括號外是層次三，所以也可作分配。

教師須注意，這方法對涉及除數時較複雜，例如， $(4+2) \div 12$ 時，括號內是層次一，括號外是層次二，所以可以分配。 $12 \div (4+2)$ 則是另一情況，卻不可分配，除號的先後次序對不可分配有影響。這可能是這方法的短版，教師宜多向同學作解說。

例 IV 解說

下圖是一個邊長 $a+b$ 的正方形， $(a+b)^2$ 是大正方形的面積，其面積是相等於二個正方形(a^2 及 b^2)及兩個長方形(ab 及 ab)，可見 $(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$

所以如果括號外高兩個層次是不能分配的



生活實例

以上的四則運算在我們生活實例中比比皆是，我們可以透過一些情況向學生解釋清楚：

例一：

媽媽帶了 100 元到超級市場，買了 5 個 8 元一個的橙，又買了 40 元蘋果，請問媽媽最後剩下多少錢？

解：

媽媽最後剩下

$$= 100 - 5 \times 8 - 40$$

如果我們順序計算，先計 $100 - 5 = 95$ ，再將 $95 \times 8 = 760$ ，再將 760 減去 40，答案會是 720。

可以讓學生看出其不合理的地方，沒有理由帶錢去超級市場，購買東西後錢反而多了。所以必須先計算 5×8 才會正確。

例二：

哥哥有 1000 元，弟弟及妹妹原本各有 300 元，分別都用了 200 元買了玩具，問現在哥哥比弟弟和妹妹共多幾元？

解：

哥哥現在比弟弟和妹妹多
 $= 1000 - 2(300 - 200)$

如果不分配括號前的負 2 變成 $1000 - 600 - 200 = 200$ ，學生們可看出其不合理的地方，因哥哥在弟弟和妹妹未購買玩具前錢已比他們多 400 元，沒理由弟弟和妹妹買了玩具後反而只多了 200 元。從而帶出括號前分配的必要性。

結語

以上所提出的只屬一種方向去嘗試解說「為何一定要先乘除後加減」和「何時在運算時要作分配」。

雖然上述解說看似可行，但要留意的是如果我們面對的是中學的同學，特別是高中的同學會比較難處理。而且這個解說辦法可能較適合已掌握加減乘除的學生，但對四則運算還未完全融會貫通的同學相信仍然會有一定困難。因為能力較強的同學就算不明白也會選擇牢記，經過中小學幾年來的不斷反覆訓練，

若掌握了相信也不會關心個中道理。所以到這個階段仍然問這些問題的同学很大機會屬於成績稍遜類別。經驗告訴筆者對這些同学解釋這個概念時往往會出現其他困難。筆者建議教師，教導數學能力稍遜的學生謹記用小步子及每一步驟要多作練習，避免「越講越唔明」，亦要留意他們可能出現的負面情緒，畢竟感覺愉快才是永遠的學習王道。能否讓學生理解還是要有賴各位數學教師的專業判斷！

參考文獻：

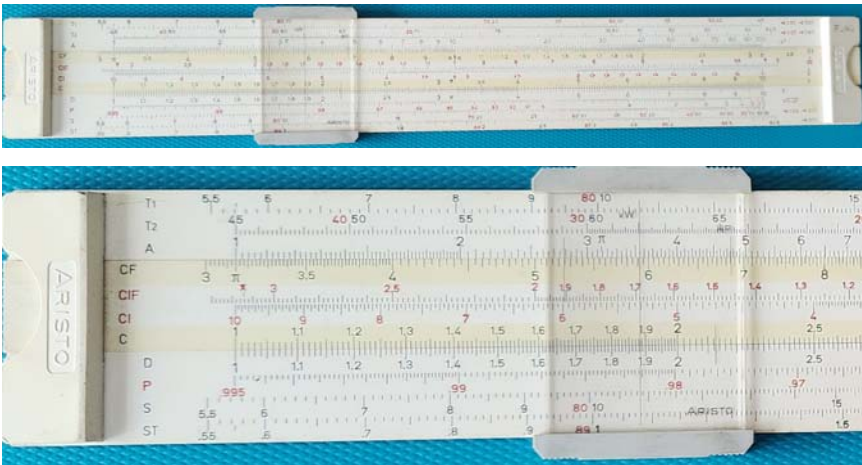
黃毅英(2013)。〈第一章：數及其運算〉。《數學百子櫃系列(十四) 數學教師不怕被學生難倒了！——中小學數學教師所需的數學知識》，香港：課程發展處數學教育組，頁11。

課堂活動：自製計算尺

馮德華

退休數學教師

引言：計算尺是電子計算機面世前被廣泛使用的計算工具，工程師必備。科學家和工程師，只要把計算尺拉來拉去，數秒間便能求得乘法、除法、開平方和開立方的結果。花多些時間，還可求得比例、倒數、正弦、餘弦和正切等結果。筆者嘗試藉本文解說其背後的數學原理，讓讀者欣賞設計者的智慧。計算尺的圖片如下所示：



圖片來源：筆者的計算尺

A. 利用兩把等距刻度的直尺製作「加數」計算尺

預備兩把等距刻度的直尺。將兩把等距刻度的直尺上下對齊，都是由零開始的（圖 1）。

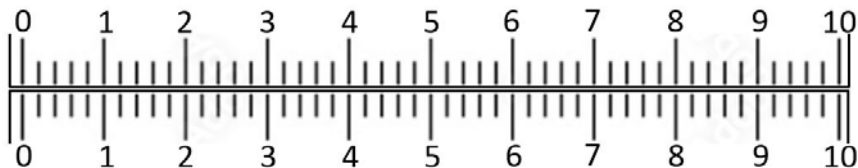


圖 1

這樣，一把「加數」計算尺便完成（圖 1）。

以下為使用該計算尺進行計算之例子：

例 1：計算 $2 + 4$ 。

解：將上尺的 0 右移到下尺的 2 上面，上尺的 4 對著下尺的數字就是 $2 + 4$ 的結果 6（圖 2）。

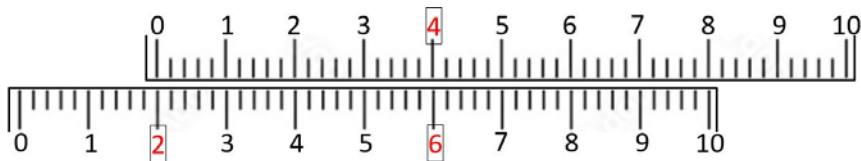


圖 2

例 2：計算 $a + b$ 。(a 及 b 分別是被加數及加數，其相加的運作方法如下。)

解：將上尺的 0 右移到下尺的被加數 a 上面，上尺的加數 b 對著下尺的數字就是 $a + b$ 的結果(圖 3)。



圖 3

以下我們會利用「加數」計算尺原理作為過渡到製造「乘數」計算尺。

B. 利用指數定律製作一把「乘數」計算尺

利用指數定律： $2^a \times 2^b = 2^{a+b}$ 。

(為清楚解釋，以下 $m = 2^a$ 中，稱 m 為原數及 a 為指數。)

例 3：計算 4×8 。

解：因 $4 = 2^2$ 及 $8 = 2^3$ ，所以將題中的原數分別變換成指數
 $4 \rightarrow 2$ 及 $8 \rightarrow 3$ ，利用指數定律中原數的指數相加後的
 結果，變回原數就得到答案。

利用圖 1 加數計算尺計算 $2 + 3$ 。

將上尺的 0 右移到下尺的 2 上面，上尺的 3 對著下尺的
 數字就是 $2 + 3$ 的結果 5 (圖 4)。

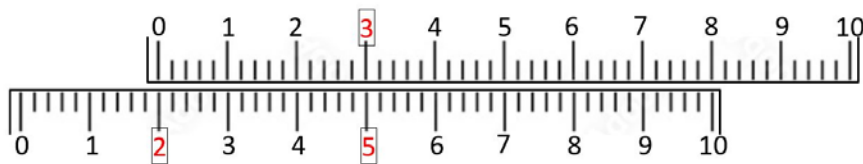


圖 4

由於 $2 + 3 = 5$

將左右兩邊分別變回原數

即 $2^{2+3} = 2^5$

最後得到答案 $4 \times 8 = 2^2 \times 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 = 32$ 。

例 4：計算 4×30 。

解：因為 30 不能準確地寫成 2 的指數，所以用計算機計算在原數 30 中 2 的指數（準確至一個小數位），即 $30 \approx 2^{4.9}$ 。

因為 $4 = 2^2$ 及 $30 \approx 2^{4.9}$ ，

所以將題中的原數分別變換成指數 $4 \rightarrow 2$ 及 $30 \rightarrow 4.9$ ，利用指數定律中原數的指數相加後變回原數就得到答案。

利用圖 1 加數計算尺計算 $2 + 4.9$ 。

將上尺的 0 右移到下尺的 2 上面，上尺的 4.9 對著下尺的數字就是 $2 + 4.9$ 的結果 6.9（準確至一個小數位）（圖 5）。

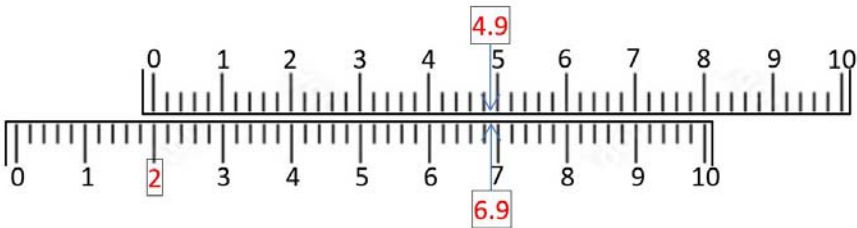


圖 5

由於 $2 + 4.9 = 6.9$

將左右兩邊分別變回原數

即 $2^{2+4.9} = 2^{6.9}$

最後得到答案 $4 \times 30 = 2^2 \times 2^{4.9} = 2^{2+4.9} = 2^{6.9} = 119.4$ （答案準確至一個小數位）。

例 5：計算 $m \times n$ 。(m 及 n 分別是被乘數及乘數。)

解：計算 $m=2^a$ 及 $n=2^b$ 中， a 及 b 的值，答案可以是近似值。

將題中的原數分別變換成以 2 為底的指數 $m \rightarrow a$ 及 $n \rightarrow b$ ，利用指數定律中原數的指數相加後的結果，變回原數就得到答案。

利用圖 1 加數計算尺計算 $a + b$ 。

將上尺的 0 右移到下尺的 a 上面，上尺的 b 對著下尺的數字就是 $a + b$ 的結果 (圖 6)。



圖 6

最後將 $a + b$ 變回原數 2^{a+b} 就是 $m \times n$ 的答案。

$$\text{即 } m \times n = 2^a \times 2^b = 2^{a+b}.$$

現在計算，要將原數及指數不斷變換，很複雜。要簡單，便要將等距刻度直尺(圖 7)上的刻度變換成 2 的指數。

$$\text{因 } 1=2^0, 0 \rightarrow 1; \text{ 因 } 2=2^1, 1 \rightarrow 2;$$

因 $3 \approx 2^{1.6}$ ， $1.6 \rightarrow 3$ ；因 $4 = 2^2$ ， $2 \rightarrow 4$ ；

因 $5 \approx 2^{2.3}$ ， $2.3 \rightarrow 5$ ；因 $6 \approx 2^{2.6}$ ， $2.6 \rightarrow 6$ ；

因 $7 \approx 2^{2.8}$ ， $2.8 \rightarrow 7$ ；……。

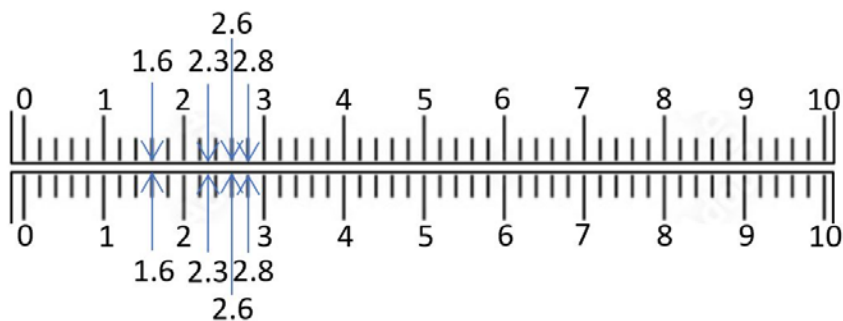


圖 7

注意現在上下兩把尺是由 2^0 ，即 1 開始，亦不等距 (圖 8)。

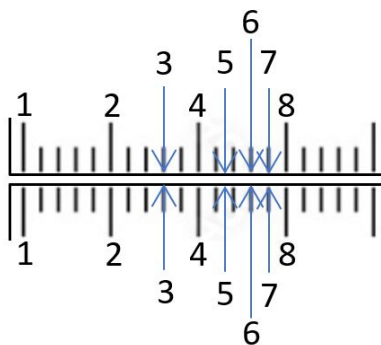


圖 8

將圖 7 中的尺變換成圖 8 的尺後，一把易用的乘數計算尺(圖 8)就完成。

現在計算 $m \times n$ ，只需利用圖 8 的計算尺，將上尺的 1 右移到下尺的 m 上面，上尺的 n 對著下尺的數字就是 $m \times n$ 的結果(圖 9)。



圖 9

C. 如何利用對數定理製作一把「乘數」計算尺

一般的計算尺，不是利用指數的加數定律，而是利用對數性質

$\log m + \log n = \log(mn)$ 來製作乘數計算尺。

(為清楚解釋，以下在 $\log m = a$ 中，稱 m 為原數或 a 的反對數及 a 為對數。)

把 0 至 1 等距刻度直尺(圖 10)上的刻度變換成該刻度的反對數(準確至一個小數位)，

因 $\log 1 = 0$ ， $0 \rightarrow 1$ ；因 $\log 2 \approx 0.30$ ， $0.30 \rightarrow 2$ ；

因 $\log 3 \approx 0.48$ ， $0.48 \rightarrow 3$ ；因 $\log 4 \approx 0.60$ ， $0.60 \rightarrow 4$ ；

因 $\log 5 \approx 0.70$ ， $0.70 \rightarrow 5$ ；因 $\log 6 \approx 0.78$ ， $0.78 \rightarrow 6$ ；……

(圖 11)。

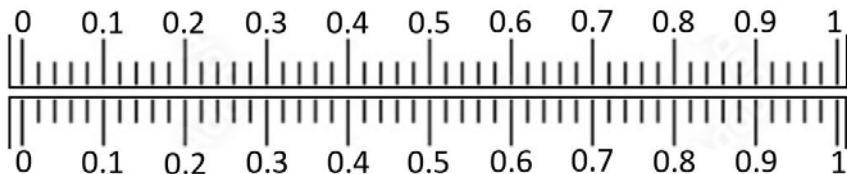


圖 10

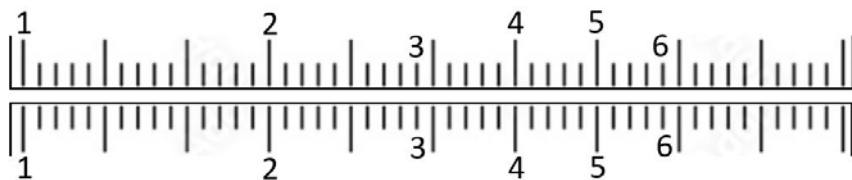


圖 11

圖 11 是乘數計算尺的設計方法，計算的精準度是以計算尺上刻度的間距大小而定。

例 6：計算 2×3 (準確至一個小數位)。

解 因 $\log 2 \approx 0.30$ 及 $\log 3 \approx 0.48$ ，

將對數相加，即 $0.30 + 0.48$ ，

$$\text{得 } \log(2 \times 3) = \log 2 + \log 3 \approx 0.30 + 0.48 = 0.78$$

根據對數性質，就可將 2×3 轉換成 $\log 2 + \log 3$ 計算，得結果 0.78 的反對數就是答案 6.0 (因 $\log 6.0 \approx 0.78$)。

利用圖 11 的計算尺，將上尺的 1 右移到下尺的 2 上面(即 0.30 的反對數)，上尺的 3(即 0.48 的反對數) 對著下尺的數字就是 2×3 (即 0.78 的反對數) 的結果(圖 12)。

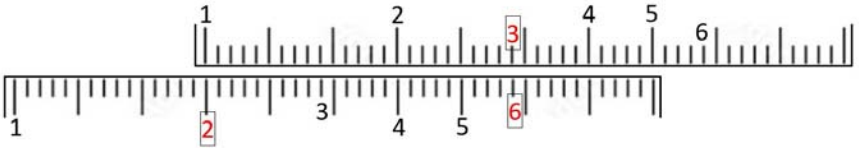


圖 12

答案： $2 \times 3 = 6$

例 7：計算 2×5 (準確至一個小數位)。

解 因 $\log 2 \approx 0.30$ 、及 $\log 5 \approx 0.70$ ，

將對數相加 $0.30 + 0.70$ ，

$$\log(2 \times 5) = \log 2 + \log 5 \approx 0.30 + 0.70 = 1.00$$

根據對數性質，就可將 2×5 轉換 $\log 2 + \log 5$ 計算，得結果 1 的反對數就是答案 10 (因 $\log 10 = 1$)。

利用圖 11 的計算尺，將上尺的 1 右移到下尺的 2 上面(即 0.30 的反對數)，上尺的 5(即 0.70 的反對數) 對著下尺的數字就是 2×5 (即 1 的反對數) 的結果(圖 13)。

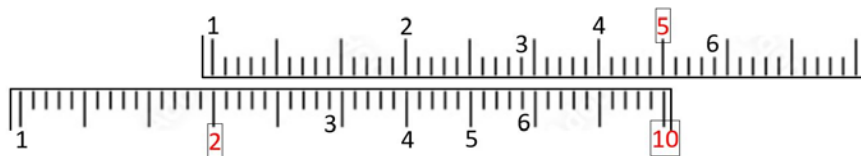


圖 13

答案： $2 \times 5 = 10$

現在計算 $m \times n$ ，只需利用圖 11 的計算尺，將上尺的 1 右移到下尺的 m 上面，上尺的 n 對著下尺的數字就是 $m \times n$ 的結果(圖 14)。



圖 14

後記：試想古人在未有對數表及計算機時，已能製作出這樣的一把計算尺，怎能不叫現代人佩服！

中國數學史與數學教學

李志堅 培基小學

姚泳楹 中華傳道會呂明才小學

司徒寶美博士 大學講師

引言

數學往往給予人一種「深不可測」、「完全理性」、「冷酷的數字」等的感覺，但數學其實存在於大自然、藝術及歷史之中，並有其「人性化」的一面。教師透過在教學活動中適切引入數學史，讓學生快速經歷數學的創造與演變，不單能強化學生對課題的理解，更能讓學生感受數學的「人味」並培養學生構思、探究、推理、傳意、建立和以數學方式解決問題，以及從美學和文化的角度欣賞數學的能力（課程發展議會(2017)）。中小學的數學課程中，不同課題均有中國數學家的貢獻。教師引入中國數學史於教學活動中，學生能感受中華文化中數學驕人的發展和演變，並為中國數學的輝煌成就而自豪，從而自然連繫堅毅、國民身份認同的價值觀和態度。

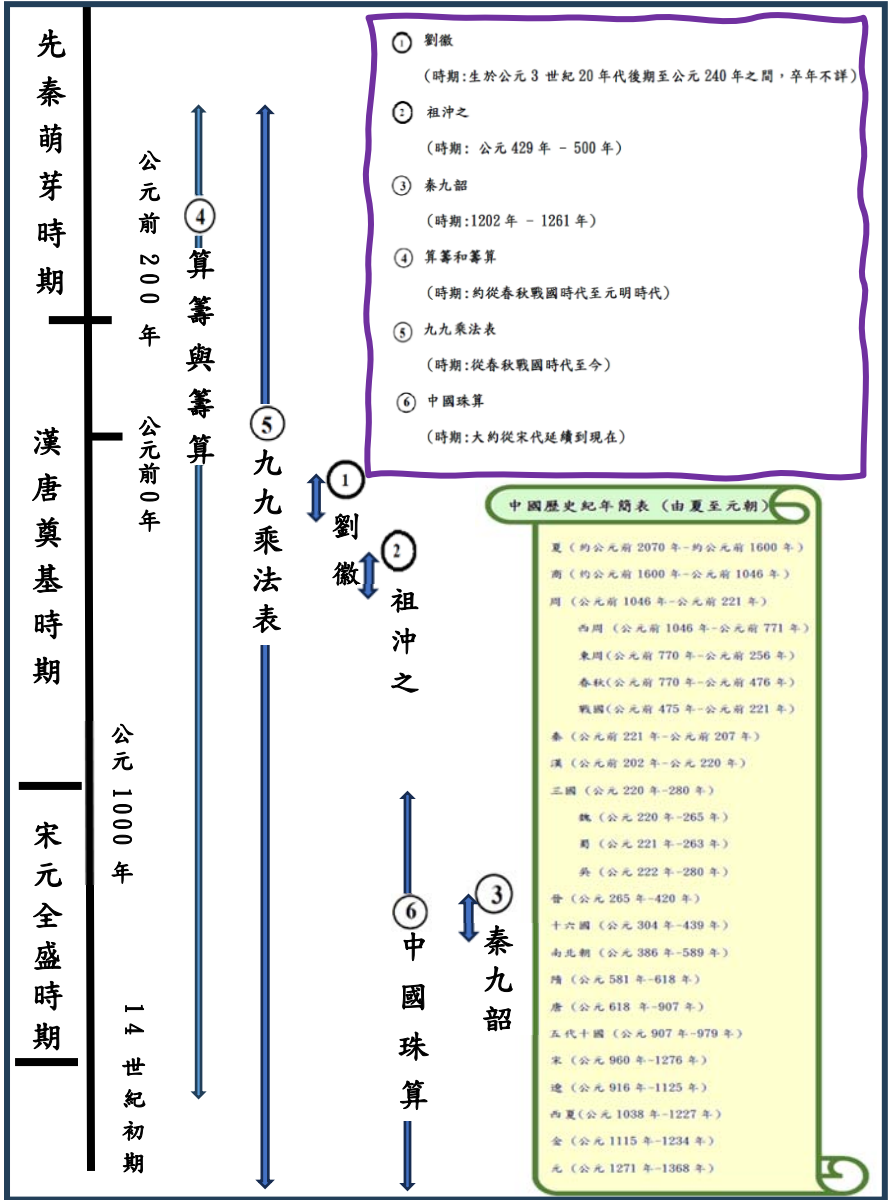
本文三位作者的前作《數學史與數學教育》(2023)，當中以時序呈現世界數學史的發展。而本文亦利用時序呈現中國數學史的發展，擷取與數學課程指引中相關的數學史資料與部分中國數學家資料以編寫。當中談及圓周率時，筆者以時間性表示“微

率”、“約率”、“密率”之間的聯繫及數值變化，體現中華數學文化的一脈相承及不斷創新。本文《中國數學史與數學教育》和前作《數學史與數學教育》可讓讀者平行閱讀，讓讀者對數學史及數學教育在地域性及時間性上有更深厚的瞭解，並能運用在小學及初中的常規課堂或增潤教學活動中，讓學生體驗數學之美及激發他們對學習數學的興趣。

中國數學史

關於中國數學史的分期，目前學術界有不同的看法。本文大體依照中文百科全書網站(中國古代數學)、百度百科網站(中國古代數學:中國古代科學中一門重要學科)的分期。將中國數學發展劃分為以下五個時期，分別為：1. 先秦萌芽時期（大約公元前 200 年以前）；2. 漢唐奠基時期（大約公元前 200 年 - 公元 1000 年）；3. 宋元全盛時期（公元 1000 年 - 14 世紀初期）；4. 西學輸入時期（14 世紀初期 - 20 世紀初）及 5. 近現代數學發展時期（20 世紀初至今）。本文集中討論三位中國數學家（劉徽、祖沖之和秦九韶）對數學的貢獻。

擷取相關中國數學史概覽



擷取相關中國數學家及相應教學活動設計

一、漢唐奠基時期（大約公元前 200 年 - 公元 1000 年）

1. 劉徽¹

¹ 參考資料：

- a. 錢寶琮(1951)。〈中國古代數學的偉大成就〉。《科學通報》，1951,2(10)，頁 1041-1043。
- b. 洪萬生(1978)。〈割圓術始末〉。《數學傳播》，第三卷，第二期 (11/1978)，頁 44-52。
- c. 傅海倫(1998)。〈九章算術與小學數學教學〉。《數學教育 (EduMath)》，第六期 (6/98)，頁 24-30。
- d. 徐梅芳(2002)。〈劉徽之『割圓術』〉。《HPM 通訊》，第五卷，第十期，第一版，(10/2002)，頁 22-23。
- e. 李文林(2002)。〈數學史概論〉(第二版)。北京：高等教育出版社，2002，頁 78-80。
- f. 洪萬生(2004)。〈三國 π 裏袖乾坤-劉徽的數學貢獻〉。《科學發展》，2004 年 12 月，384 期，頁 68-74。
- g. 林德政、王懷智(2006)。〈 π 案叫絕論劉徽〉。《HPM 通訊》，第九卷，第六期，第一四版 (6/2006)，頁 1-5。
- h. 郭書春(2013)。〈中國古代最偉大的數學家劉徽 --為紀念劉徽注《九章算術》1750 週年而作〉。《數學文化》，第 4 卷第 4 期，2013。ISSN:2070-5454X，頁 16-29。
- i. 王雅琪、瞿鑫婷 (2019)。〈HPM 視角下圓的面積公式教學〉。《中小學課堂教學研究》，2019 年，第 6 期，頁 9-14。
- j. 蕭文強(2020)。〈第七章：總結〉。《數學百子櫃系列(二十五)》，香港：課程發展處數學教育組，頁 64-66。
- k. 鄧美愉(2020)。〈第二章：《九章算術》中的線性平面圖形面積求算法〉。《數學百子櫃系列(二十五)》，香港：課程發展處數學教育組，頁 6-19。

網上參考資料：《九章算術》的網上版：

<http://www.mathsgreat.com/CMhist/jiuzhang/jiuzhang.html>

(時期:生於公元 3 世紀 20 年代後期至公元 240 年之間, 卒年不詳)²

劉徽是魏晉時期傑出的數學家。籍貫是淄鄉(今山東鄒平縣), 生卒年不詳, 但根據郭書春(2013)的分析, 劉徽應該生於公元 3 世紀 20 年代後期至公元 240 年之間。他在數學上的成就對後世數學的發展有極大的貢獻, 在中國數學史上佔有重要的地位。

劉徽自幼對數學抱有濃厚興趣, 長年不懈地鑽研《九章算術》³。魏景元四年(公元 263 年)⁴, 他完成了影響深遠的《九章算術注》九卷, 並撰寫《重差》附于其中為第十卷。直到唐朝時, 《重差》才以單行成書, 因其第一題為測量海島高度和

² 郭書春(2013)。〈中國古代最偉大的數學家劉徽-為紀念劉徽注《九章算術》1750 週年而作〉。《數學文化》, 第 4 卷第 4 期, 2013。ISSN:2070-5454X, 頁 19。

³ 劉徽在《九章算術注》原序說:“徽幼習《九章》, 長再詳覽。觀陰陽之割裂, 總算術之根源, 探蹟之暇, 遂悟其意。是以敢竭頑魯, 采其所見, 為之作注。”(郭書春, 2013, 頁 20)。《九章算術》成書約於公元前 100 年。它是以『問、答、術(數學方法)』的形式程示, 全書共有 246 題和 202 術, 分別隸屬於方田、粟米、衰分、少廣、商功、均輸、盈不足、方程、勾股九章。(可參閱《九章算術》的網上版; <http://www.mathsgreat.com/CMhist/jiuzhang/jiuzhang.html>)。

⁴ 郭書春(2013)。〈中國古代最偉大的數學家劉徽-為紀念劉徽注《九章算術》1750 週年而作〉。《數學文化》, 第 4 卷第 4 期, 2013。ISSN:2070-5454X, 頁 19。

距離的問題，故取名為《海島算經》，成為《算經十書》⁵之一。劉徽的《九章算術注》是《九章算術》一書的註釋，不僅為《九章算術》裏各種算法解釋理由和各個定理補充證明外⁶，並且在論述過程中提出許多創新的數學理論和方法，例如：利用“出入相補”或“以盈補虛”的方法，意思是指一個平面圖形分割成若干塊，各塊面積之和等於原有圖形的面積，從而求得到一些直線形的面積(如三角形面積、長方形面積等)⁷；更提出了建基於極限概念的“割圓術”，從而給出了圓面積公式的證明，在此基礎上發展出求圓周率(π)近似值的計算方法，並求得 $\pi=3.1416$ ，是當時世界上精確度高的圓周率近似值⁸。

⁵ 《算經十書》是漢、唐十部算經的總集，包括《周髀算經》、《九章算術》、《海島算經》、《孫子算經》、《夏侯陽算經》、《綴術》、《張丘建算經》、《五曹算經》、《五經算術》和《緝古算經》。

⁶ 錢寶琮(1951)。 \langle 中國古代數學的偉大成就 \rangle 。《科學通報》，1951, 2(10)。頁 1042-1043。

⁷ 蕭文強(2020)。 \langle 第七章：總結 \rangle 。《數學百子櫃系列(二十五)》，香港：課程發展處數學教育組，頁 64-65。

⁸ 傅海倫(1998)。 \langle 九章算術與小學數學教學 \rangle 。《數學教育 (EduMath)》，第六期 (6/98)，頁 28。

劉徽在《九章算術》〈方田章〉“圓田術”⁹的注釋¹⁰內，提出“割圓術”作為計算圓的周長、面積和圓周率的基礎¹¹，它是利用圓內接正多邊形面積去逐步逼近圓面積的方法¹²。劉徽首先利用了“出入相補”和“割圓術”的兩個理論¹³，證明了圓面積公式為“半周乘半徑”(即半圓周乘半徑)。劉徽註¹⁴：

“按：半周為從，半徑為廣，故廣從相乘為積步也。……
又按：為圖，以六觚之一面乘一弧之半徑正，三之，得十二觚之冪。……。割之彌細，所失彌少。割之又割，以至於不可割，則與圓周合體而無所失矣。……以一面乘半徑，觚而裁之，每輒自倍。故以半周乘半徑而為圓冪。”

這就是說，劉徽先在一個圓內製作出內接正六邊形，然後把邊數加倍，得內接正十二邊形(見圖 1a)。利用出入相補原理，

⁹ 圓田術曰：“半周半徑相乘得積步”。即圓面積 = $\frac{1}{2}Cr$ ， C 為圓周， r 為半徑。

¹⁰ 《九章算術》的網上版：九章算術卷第一：方田，頁 5-6。

http://www.mathsgreat.com/CMhist/jiuzhang/jiuzhang_003.pdf

¹¹ 李文林(2002)。〈數學史概論〉(第二版)。北京：高等教育出版社，2002，頁 78。

¹² 王雅琪、瞿鑫婷(2019)。〈HPM 視角下圓的面積公式教學〉。《中小學課堂教學研究》，2019 年，第 6 期，頁 10。

¹³ 徐梅芳(2002)。〈劉徽之『割圓術』〉。《HPM 通訊》，第五卷，第十期，第一版，(10/2002)，頁 23。

¹⁴ 洪萬生(2004)。〈三國 π 裏袖乾坤-劉徽的數學貢獻〉。《科學發展》，2004 年 12 月，384 期，頁 71。

把內接正十二邊形拼成一個長為內接正六邊形的半周長(或內接正六邊形邊長的 3 倍)、寬為圓半徑的長方形¹⁵(見圖 1b)。利用長方形面積公式，求得內接正十二邊形的面積¹⁶為

$$S_{12} = \frac{1}{2}C_6r \text{ 或 } 3l_6r$$

其中 C_6 、 l_6 分別為圓內接正六邊形周長、邊長， r 為圓半徑。

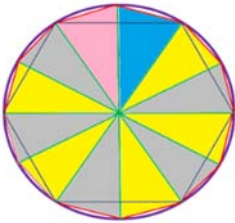


圖 1a

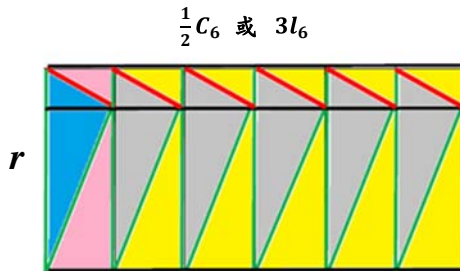


圖 1b

再作圓內接正 24 邊形、正 48 邊形、正 96 邊形 對應得到與正多邊形等面積的長方形。當割圓細密至極限，形成正無限多邊形，其面積最終與圓面積完全重合，沒有什麼差距。因此對應長方形面積亦會逐漸地接近圓面積，且對應長方形

¹⁵ 王雅琪、瞿鑫婷 (2019)。〈HPM 視角下圓的面積公式教學〉。《中小學課堂教學研究》，2019 年，第 6 期，頁 10。

¹⁶ 劉徽注：“以六觚之一面乘一弧之半徑正，三之，得十二觚之冪。”即以圓內接正六邊形的一邊乘以圓半徑，再乘以 3，便求得圓內接正十二邊形的面積。

的長就接近圓周長的一半，而寬始終等於圓半徑。最後，可推論得圓面積公式為“半周乘半徑”，即圓面積 $S_{\text{圓}} = \frac{1}{2}Cr$ ，其中 C 為圓周， r 為半徑。這是劉徽對圓面積公式的證明。

緊接著，劉徽提出圓周與直徑的關係，並非“周三徑一之率”¹⁷（就是圓周長大約是直徑的三倍，故取圓周率為 3，這稱為“古率”¹⁸），圓周率(π)是圓的周長與其直徑的比值，它是一個常數，又是一個無理數。因此，劉徽為計算 π 精確近似值提供了嚴密的理論和完善的算法。劉徽註¹⁹：

¹⁷ 洪萬生(2004)。〈三國 π 裏袖乾坤-劉徽的數學貢獻〉。《科學發展》，2004 年 12 月，384 期，頁 72。

¹⁸ 陳仁政(2005)。〈說不盡的 π 〉。(好玩的數學／張景中主編)。北京：科學出版社，2005。ISBN 7-03-014635-2。頁 7-8

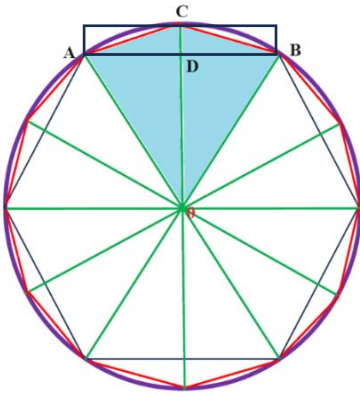
¹⁹ 洪萬生(1978)。〈割圓術始末〉。《數學傳播》，第三卷，第二期 (11/1978)，頁 46。

“割六觚以為十二觚，術曰：置圓徑二尺，半之為一尺，即圓裏觚之面也。令半徑一尺為弦，半面五寸為句，為之求股。以句冪二十五寸減弦冪，餘七十五寸，開方除之下至秒忽，又一退法，求其微數。微數無名，知以為分子，以下為分母，約作五分忽之二，故得股八寸六分六釐二秒五忽五分忽之二。以減半徑，餘一寸三分三釐九毫七秒四忽五分忽之三，謂之小句。觚之半面，又謂之小股，為之求弦。其冪二千六百七十九億四千九百一十九萬三千四百四十五忽，餘忽棄之。開方除之，節十二觚之一面也。”

也就是說，劉徽先從圓半徑與圓內接正 n 邊形邊長，運用勾股定理(又稱畢氏定理)算出圓內接正 $2n$ 邊形邊長的遞迴公式

為 $l_{2n} = \sqrt{\left(r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{l_n}{2}\right)^2}\right)^2 + \left(\frac{l_n}{2}\right)^2}$ ，其中 r 為圓半徑， l_n 為圓內接正 n 邊形邊長，其證明²⁰(見圖 2)。

²⁰ 洪萬生(1978)。(割圓術始末)。《數學傳播》，第三卷，第二期 (11/1978)，頁 46。



$$OA = OB = OC = r$$

$$AB = l_n$$

在 $\triangle ODA$ 中，由勾股定理得，

$$OD = \sqrt{r^2 - \left(\frac{l_n}{2}\right)^2}$$

$$CD = r - OD = r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{l_n}{2}\right)^2}$$

$$AC = BC = l_{2n}$$

在 $\triangle CDA$ 中，由勾股定理得，

$$l_{2n} = \sqrt{(CD)^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2}$$

$$l_{2n} = \sqrt{\left(r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{l_n}{2}\right)^2}\right)^2 + \left(\frac{l_n}{2}\right)^2}$$

圖 2 圓內接正 $2n$ 邊形邊長 l_{2n} 遞迴公式的證明

有了圓內接正 $2n$ 邊形邊長 l_{2n} ，就可以算出圓內接正 $4n$ 邊形的面積(S_{4n})，為：

$$S_{4n} = \frac{1}{2} \cdot (2n \cdot l_{2n}) \cdot r \quad (\text{利用 } S_{4n} = \frac{1}{2} C_{2n} r \text{ (見圖1a,b)},$$

$$C_{2n} = 2n \cdot l_{2n})$$

$S_{4n} = 2n \cdot \frac{r \cdot l_{2n}}{2}$ (註： $\frac{r \cdot l_{2n}}{2}$ 是箏形 $ACBO$ 的面積(見圖2)，因箏形的面積為兩對角線相乘積之半。)

其中 r 為圓半徑， l_{2n} 圓內接正 $2n$ 邊形邊長。

並且，在圓內接正 n 邊形的每邊上作一高為 CD 的矩形(見圖2)，就可證明²¹: $S_{2n} < S_{\text{圓}} < S_{2n} + (S_{2n} - S_n)$

如果不斷倍增圓內接正多邊形的邊數，圓內接正多邊形面積亦會逐漸地接近圓面積。先求得圓面積的近似值，再利用圓面積 $S_{\text{圓}} = \frac{1}{2}Cr$ (C 為圓周， r 為半徑)，並求得圓周，最後，再將圓周除以直徑，而得 π 的近似值²²。

在圓半徑的長為一單位的情況下，圓面積和半圓周長的度量都等於 π ²³ (即是圓面積=半圓周長= π)。故劉徽利用上述公式 l_{2n} 、 S_{4n} 及 $S_{2n} < S_{\text{圓}} < S_{2n} + (S_{2n} - S_n)$ ，從半徑為一尺的圓內接正六邊形(圓內正六邊形每邊長與半徑相等)起算，一直算到圓內接正 192 邊形面積後，求得 $\pi \approx \frac{157}{50} = 3.14$ ²⁴，

²¹ 李文林(2002)。〈數學史概論〉(第二版)。北京: 高等教育出版社, 2002, 頁 79。

²² 洪萬生(2004)。〈三國 π 裏袖乾坤-劉徽的數學貢獻〉。《科學發展》, 2004 年 12 月, 384 期, 頁 72。

²³ 洪萬生(1978)。〈割圓術始末〉。《數學傳播》, 第三卷, 第二期 (11/1978), 頁 47。

²⁴ 先利用半徑 1 尺的圓內接正 96 與 192 邊形求得圓面積的近似值 3.14 平方尺, 然後求得圓周為 6.28 尺, 最後, 再將圓周除以直徑, 而得到 $\pi = 3.14$ (洪萬生, 2004, 頁 72)。

後人稱為“徽率”²⁵。及後繼續算到圓內接正 3072 邊形面積，最後求出了圓周率 $\pi \approx \frac{3927}{1250} = 3.1416$ ²⁶ 的結果²⁷。

教學活動 (一): 重塑劉徽“割圓術”的概念²⁸

教師先介紹劉徽如何運用“割圓術”，不僅提供了圓面積公式的證明，並且求得當時世界上精確度高的圓周率近似值。劉徽在中國數學史上作出了極大的貢獻，奠定了他“是古代和現代東方和西方的數學界一個偉大的人物”²⁹。讓學生通過對中國數學家的成就和貢獻的瞭解，對中華民族的智慧引以為傲，並對數學家鍥而不捨的探究精神產生敬佩。

²⁵ 李文林(2002)。〈數學史概論〉(第二版)。北京: 高等教育出版社, 2002, 頁 79。

²⁶ 先利用半徑 1 尺的圓內接正 1536 與 3072 邊形求得圓面積的近似值 3.1416 平方尺, 然後求得圓周為 6.2832 尺, 最後, 再將圓周除以直徑, 而得到 $\pi = 3.1416$ 。

²⁷ 錢寶琮(1951)。〈中國古代數學的偉大成就〉。《科學通報》, 1951, 2(10), 頁 1043。

²⁸ 王雅琪、瞿鑫婷 (2019)。〈HPM 視角下圓的面積公式教學〉。《中小學課堂教學研究》, 2019 年, 第 6 期, 頁 10-12。

²⁹ 李信明 (2000)。〈科學上常用的常數—圓周率〉《數學家傳奇》, 台北: 九章出版社, 頁 55。

其後在「動手做」環節，讓學生通過探究正多邊形與圓的關係³⁰，瞭解如何利用正多邊形面積無限逼近圓面積，體會“以方出圓”³¹及極限的概念。重塑劉徽“割圓術”的概念。此外，無限逼近的數學思維，是將來學習微積分非常重要的關鍵。

首先，讓學生利用 Polypad 幾何軟件（網頁：<https://polypad.amplify.com/p>）製作正多邊形，由正六邊形轉變為正十二邊形(如圖 3a 和 3b 所示)。同時引導學生觀察正多邊形的變化，從而學生發現正多邊形的邊數越多，其形狀越接近圓形。透過此活動初步讓學生直觀地感受當正多邊形的邊數越多，正多邊形越逼近圓，並且感受到“以方出圓”的概念³²。

³⁰ 本活動，只讓學生感受到正多邊形如何從外、內側逼近圓。由於這部分內容偏難，因此不需作深入解釋。

³¹ 洪萬生(2004)。(三國 π 裏袖乾坤-劉徽的數學貢獻)。《科學發展》，2004年12月，384期，頁69-71。

³² 此活動是從正多邊形逼近圓形，本質上是從外側逼近圓。

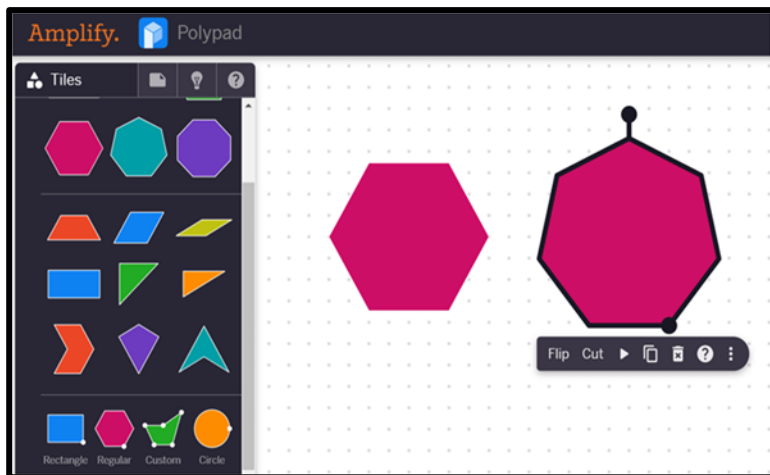


圖 3a：利用 Polypad，選取「Regular」，先得出正六邊形。選取複製功能，並將滑鼠移往黑色點，滑鼠圖示變成十字並滑移，圖形由正六邊形變成其他正多邊形。

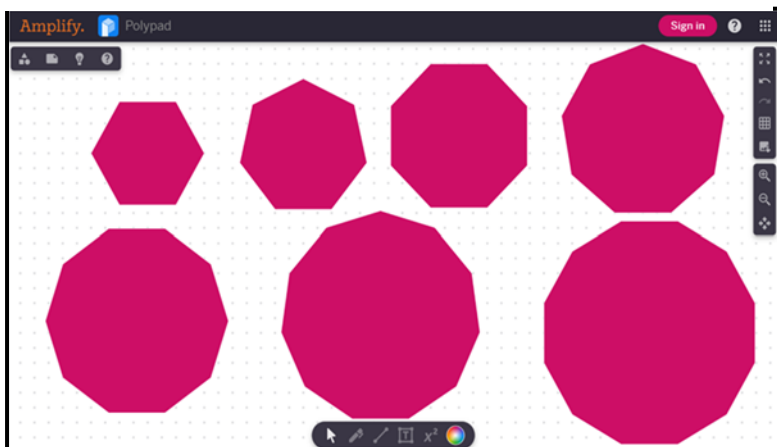


圖 3b 由正六邊形轉變為正十二邊形

緊接著，教師提出以下的思考問題，讓學生分組討論：

我們發現，當正多邊形的邊數越多，其面積與圓面積之間的差值就越小。當邊數無窮多時，那麼正多邊形面積與圓面積就相等嗎？

其後，教師利用 GeoGebra³³ 幾何軟件展示圓內接正多邊形的變化，由圓內接正 6 邊形轉變為正 192 邊形(如圖 4a 和 4b 所示)。再引導學生觀察其變化，從而發現圓內接正多邊形的邊數倍增，其面積越接近圓面積。透過此活動讓學生更直觀地感受當邊數無窮多時，圓內接正多邊形面積近似等於圓面積

34。

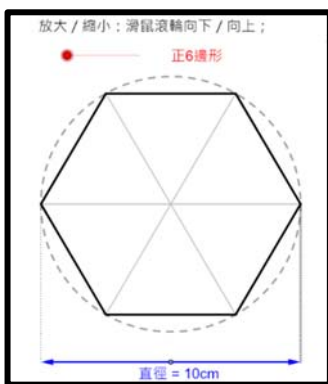


圖 4a 透過 GeoGebra 製作圓內接正多邊形
(擷錄自 <https://www.geogebra.org/m/zmZBaSsh>)

³³ 網上參考資料：

劉徽的「割圓術」(作者：柯志明)

<https://www.geogebra.org/m/zmZBaSsh>

³⁴ 此活動是從圓內接正多邊形逼近圓形，本質上是從內側逼近圓。

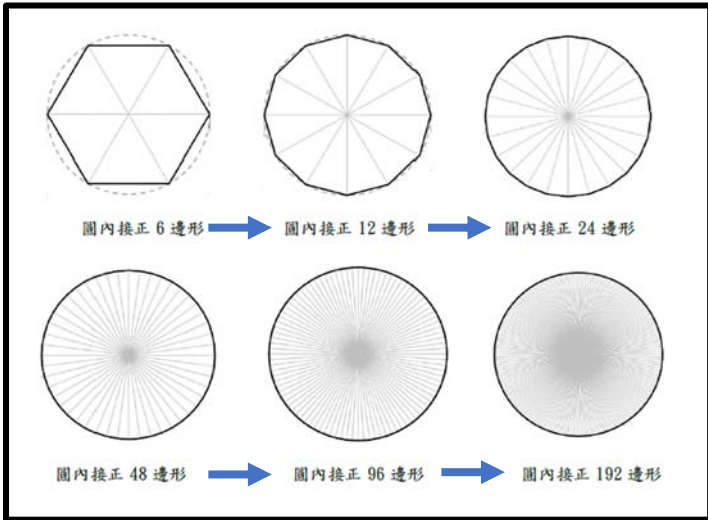


圖 4b 由圓內接正 6 邊形培增變為圓內接正 192 邊形
(擷錄自 <https://www.geogebra.org/m/zmZBaSSh>)

接著，教師表示這個過程與劉徽的割圓術十分類似。“割圓術”是利用圓內接正多邊形面積無限逼近圓面積的方法，從而給出了圓面積公式的證明，並求得圓周率的近似值。隨後教師介紹劉徽注“割圓術”的經典名句：“割之彌細，所失彌少。割之又割，以至於不可割，則與圓周合體而無所失矣”³⁵作總結。

³⁵ 洪萬生(2004)。(三國 π 裏袖乾坤-劉徽的數學貢獻)。《科學發展》，2004年12月，384期，頁71。

延伸教學活動:

讓「割圓術」、「圓面積」與「圓周率」教學更具有脈絡性的連結。

第一個延伸教學活動：「推論圓面積公式」

則是運用“出入相補”原理來求出圓內接正無限多邊形面積，進而推導出圓面積公式為“半周乘半徑”。隨後教師介紹劉徽在其注中所言：“以半周乘半徑而為圓冪”。

第二個延伸教學活動：「探究圓周率(π)」

則是利用 GeoGebra 幾何軟件進行實驗研究圓周與直徑關係，進而算出精確的圓周與其直徑的比值(即圓周率(π))。讓學生認識劉徽推導出圓周與直徑的關係，並非“周三徑一之率”。

鑑於篇幅所限，未能詳加描述，只列舉活動的學習重點，供有興趣的讀者參考及自行去設計相應的探究活動。

2. 祖沖之³⁶

(時期: 公元 429 年 - 500 年)

³⁶ 參考資料:

- a. 洪萬生(1978)。〈割圓術始末〉。《數學傳播》，第三卷，第二期 (11/1978)，頁 44-52。
- b. 汪曉勤(1999)。〈《綴術》中的「當亮、方亭之問」初探〉。《自然科學史研究》，第 8 卷，第 1 期(1999)，頁 20-27。
- c. 曲安京(2002)。〈祖沖之是如何得到圓周率 $\pi=355/113$ 的?〉。《自然辯證法通訊》，2002，第二十四卷，第 3 期，頁 72-77。
- d. 陳美東(2002)。〈祖沖之的天文曆法工作-紀念祖沖之逝世 1500 年〉。《自然辯證法通訊》，2002，第二十四卷，第 2 期，頁 68-73。
- e. 甘向陽(2002)。〈祖沖之科學精神芻論〉。《雲夢學報》，第 23 卷，第 5 期，頁 48-50。
- f. 李文林(2002)。〈數學史概論〉(第二版)。北京: 高等教育出版社, 2002, 頁 83-85。
- g. 林德政、王懷智(2006)。〈 π 案叫絕論劉徽〉。《HPM 通訊》，第九卷，第六期，第一四版 (6/2006)，頁 1-5。
- h. 王振東、姜楠(2015)。〈祖沖之與圓周率〉。《力學與實踐》。2015,37(3)，頁 404-408。
- i. 莫宗堅、黃蘋 (2022)。〈Kerala 邦的簡介與圓周率的研究〉。《數學傳播》，第 46 卷，第 2 期，(6/2022)，頁 3-5。

網上參考資料:

- a. 國史教育中心 (香港) - 【祖沖之】小檔案
https://cnhe-hk.org/wp-content/uploads/2021/02/%E7%A5%96%E6%B2%96%E4%B9%8B_Secondary-school_20201008.pdf
- b. 北區國中「數學史融入數學教學」工作坊-作品 5:祖沖之傳記 (作者:張榮和、呂虹毅)
<https://mathseed.ntue.edu.tw/resoures/96/970122-25-5.pdf>

祖沖之(公元 429-500 年)，字文遠，范陽郡涇縣（今河北省保定市涿水縣）人³⁷，南北朝時期傑出的數學家、天文學家。他在數學、天文曆法和機械製造三個領域中均擁有顯赫的成就。在數學方面，他對圓周率近似值的精確推算和球體體積的計算公式。在天文曆法方面，他曾編製著名曆法《大明曆》³⁸。在機械製造方面，他曾設計製造過水碓磨、指南車等。為紀念他對中國及世界天文數理作出的卓越貢獻，紫金山天文台把第 1888 號小行星命名為“祖沖之小行星”，並國際天文學家聯合會將月球上的一座環形山命名為“祖沖之環形山”³⁹。

祖沖之自幼好學，博覽群書。青少年時代對天文和數學均抱有濃厚的興趣，更深入鑽研歷代天文算學著作，例如《九章算術》和劉徽的注解、《重差》等算學經典。祖沖之一方面積極吸收前人的知識，另外親自考核驗證，糾正前人錯誤並加入自己的創新，從而導出了許多有價值的研究成果，令他在天文和數學方面都取得了輝煌成就。祖沖之的著作除了《大明曆》完整地保存下來之外，其餘的大部分現已失傳⁴⁰。

³⁷ 王振東、姜楠 (2015)。〈祖沖之與圓周率〉。《力學與實踐》。2015,37(3)，頁 405。

³⁸ 宋孝武帝大明六年（公元 462 年），祖沖之完成了《大明曆》是當時最精密的曆法及最早引進歲差方法(陳美東，2002，頁 68)。

³⁹ 王振東、姜楠 (2015)。〈祖沖之與圓周率〉。《力學與實踐》。2015,37(3)，頁 407。

⁴⁰ 曲安京(2002)。〈祖沖之是如何得到圓周率 $\pi=355/113$ 的?〉。《自然辯證法通訊》，2002，第二十四卷，第 3 期，頁 72。

至於數學的成就，祖沖之曾為《九章算術》與《重差》作注解。他還著有《綴術》一書，此書是一本深奧的數學著作，為《算經十書》之一，匯集了祖沖之和祖暅兩父子的數學研究成果。可惜這部數學經典名著早已失傳，其具體內容今天已無從知曉。從《隋書·律曆志》和李淳風在《九章算術》注文中可知，書中有圓周率算法和球體積推導⁴¹。但是《隋書·律曆志》僅記載祖沖之所得到的圓周率的數值，而無具體說明他推求這些數據的方法⁴²。

祖沖之在數學史上顯赫成就莫過於圓周率(π)近似值的精確推算。《綴術》已經失傳，但《隋書·律曆志》關於 π ，有以下記載⁴³：

⁴¹ 汪曉勤(1999)。〈《綴術》中的「當亮、方亭之間」初探〉。《自然科學史研究》，第8卷，第1期(1999)，頁20。

⁴² 曲安京(2002)。〈祖沖之是如何得到圓周率 $\pi=355/113$ 的?〉。《自然辯證法通訊》，2002，第二十四卷，第3期，頁72。

⁴³ 王振東、姜楠(2015)。〈祖沖之與圓周率〉。《力學與實踐》。2015，37(3)，頁405。

“宋末，南徐州從事史祖沖之，更開密法，以圓徑一億為一丈，圓周盈數三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒七忽，朒數三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒六忽，正數在盈朒二限之間。密率：圓徑一百一十三，圓周三百五十五，約率：圓徑七，周二十二。”

根據上述引文可知，祖沖之延用了劉徽的割圓術（根據學者的研究）⁴⁴ 計算出 π 的數值範圍在 3.1415926（“朒數”即不足的近似值）與 3.1415927（“盈數”即過剩的近似值）之間，其精確度達到 7 位小數 ⁴⁵。如果按照割圓術，猜測祖沖之應該計算出圓內接正 12288 邊形的邊長和圓內接正 24576 邊形的面積 ⁴⁶，方可得出這個結果。另外他還得出兩個 π 的分數近似值，並且定 $\frac{22}{7}$ 為“約率”； $\frac{355}{113}$ 為“密率”，被後人稱為“祖率”⁴⁷。

⁴⁴ 曲安京(2002)。〈祖沖之是如何得到圓周率 $\pi=355/113$ 的?〉。《自然辯證法通訊》，2002，第二十四卷，第3期，頁73。

⁴⁵ 曲安京(2002)。〈祖沖之是如何得到圓周率 $\pi=355/113$ 的?〉。《自然辯證法通訊》，2002，第二十四卷，第3期，頁73。

⁴⁶ 石厚高(1988)。〈祖沖之何以偉大〉。《數學傳播》，第十二卷，第一期 (3/1988)，頁81-82。

⁴⁷ 王振東、姜楠(2015)。〈祖沖之與圓周率〉。《力學與實踐》。2015，37(3)，頁405。

這個「密率」是 π 比較精確的分數近似值，它在一千多年後才由德國數學家奧托(V. Otto)⁴⁸ 算出。

祖沖之是如何算出約率及密率的？據數學家華羅庚曾經推測，它應當是連分數(Continued Fraction) 展開或與之相當的算法的結果⁴⁹。這就是說，取 π 的近似值為 3.1415926，加上正實數化為連分數的計算，就可得到祖沖之的約率及密率如下⁵⁰：

$$3.1415926 = 3 + 0.1415926$$

$$= 3 + \frac{1}{\frac{1}{0.1415926}}$$

$$= 3 + \frac{1}{7+0.062515979}$$

此時，把小數 0.062515979 略去，則得 $3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7} =$ 約率。

繼續如次，再算下去，

⁴⁸ 王振東、姜楠(2015)。〈祖沖之與圓周率〉。《力學與實踐》。2015,37(3)，頁 405。

⁴⁹ 曲安京(2002)。〈祖沖之是如何得到圓周率 $\pi = 355/113$ 的?〉。《自然辯證法通訊》，2002，第二十四卷，第 3 期，頁 72。

⁵⁰ 莫宗堅、黃蘋 (2022)。〈Kerala 邦的簡介與圓周率的研究〉。《數學傳播》，第 46 卷，第 2 期，(6/2022)，頁 4。

$$= 3 + \frac{1}{7 + \left(\frac{1}{\frac{1}{0.062515979}} \right)}$$

$$= 3 + \frac{1}{7 + \left(\frac{1}{15 + 0.995910436} \right)}$$

$$= 3 + \frac{1}{7 + \left(\frac{1}{15 + \left(\frac{1}{\frac{1}{0.995910436}} \right)} \right)}$$

$$= 3 + \frac{1}{7 + \left(\frac{1}{15 + \left(\frac{1}{1 + 0.004106357} \right)} \right)}$$

把小數 0.004106357 略去，則得 $3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1}}} = \frac{355}{113} =$ 密率。

根據漸近分數的理論，分母不大於 113 的所有分數中， $\frac{355}{113}$ 是

最接近於 π 值⁵¹，即 $\left| \frac{a}{b} - \pi \right| \geq \left| \frac{355}{113} - \pi \right|$ ，其中 $0 < b \leq 113$ 。

⁵¹ 洪萬生(1978)。 \langle 割圓術始末 \rangle 。《數學傳播》，第三卷，第二期 (11/1978)，頁 48。

整體而言，在當時的情況下，祖沖之即藉由籌算(用算籌作計算的方法)，計算得如此精確的圓周率(π)近似值，著實令人佩服。

教學活動 (二): 加強價值觀教育 (祖沖之及其子祖暅尋找圓周率(π)的故事)

首先教師介紹祖沖之的生平事蹟及其天文數理的顯赫成就。跟著講述以下祖沖之及其子祖暅尋找圓周率(π)的故事⁵²(故事真相，暫無從證實)。

有一天，祖沖之正讀劉徽註的《九章算術》，他意識到劉徽的圓周率(π)值不夠精確，需要使之更臻精密，於是便與兒子祖暅一起延用劉徽的割圓術繼續推算。他們將圓割成一個圓內接正六邊形，然後再依次內接一個十二邊形、二十四邊形……持續割圓下去，並使用算籌(小竹棍)進行運算。當時新的竹子來不及打磨，他們數天不斷使用，指頭也被磨破，算籌上也充滿了一個個血印。最終經過連日奮戰不懈的努力，祖沖之父子在一個直徑為一丈的大圓內畫出圓內接正 24576 邊形，並計算出 π 是 3.1415926 和 3.1415927 兩數之間，終於得出了更精密的結果。

⁵² 網上參考資料：

北區國中「數學史融入數學教學」工作坊-作品 5:祖沖之傳記 (作者：張榮和、呂虹毅)

<https://mathseed.ntue.edu.tw/resoures/96/970122-25-5.pdf>

緊接著，小組分享，組員互相分享祖沖之尋找圓周率的故事的想法。小結，作為鼓勵學生學習數學的積極態度，教師值得引述華羅庚(1964)⁵³ 之言如下：

祖沖之雖已去世一千四百多年，但他的廣泛吸收古人成就而不為其所拘泥、艱苦勞動、勇於創造和敢於堅持真理的精神，仍舊是我們應學習的榜樣。

透過祖沖之的故事，讓學生認識祖沖之為求得到圓周率(π)的更精密近似值，花了多少時間，運算得多麼艱苦。他的科學精神是中華民族的寶貴精神財富⁵⁴。從而強化學生對中國數學家的敬仰並同時加強學生的國民身份認同。並勉勵同學，足見為學無捷徑，必須下苦功，方能培養好數學能力，可望獲取卓越成績。

此外，教師在課堂上講述有關數學家的小故事也可以起教學作用，增添學習興趣，使課堂氣氛輕鬆愉快。

⁵³ 王振東、姜楠(2015)。〈祖沖之與圓周率〉。《力學與實踐》。2015,37(3)，頁 407。

⁵⁴ 甘向陽(2002)。〈祖沖之科學精神芻論〉。《雲夢學報》，第 23 卷，第 5 期，頁 50。

二、 宋元全盛時期（公元 1000 年 - 14 世紀初期）

3. 秦九韶⁵⁵

（時期：1202 年 - 1261 年）

秦九韶是南宋著名數學家，1202 年出生在普州（今四川安岳縣），字道古。他與李冶、楊輝、朱世傑更被譽為「宋元數學

⁵⁵ 參考資料:

- a. 錢寶琮(1966)。〈宋元數學史論文集〉(第一版)。北京：科學出版社，頁 60-65。
- b. 秦九韶，王守義(1992)。〈數書九章新釋〉(第 1 版)。合肥：安徽科學技術出版社，頁 219-221。
- c. 梁子傑 (1996)。秦九韶與「三斜求積術」。Mathematical Excalibur, Vol. 2, No. 2, Mar-Apr, 96，頁 1、4。
- d. 蘇意雯(2006)。〈三斜求積術淺談(海龍公式專輯)〉。《HPM 通訊》，第九卷，第四期，第六-八版 (2006/4)。
- e. 劉志彬(2010)。〈秦九韶與《數書九章》〉。《蘭臺世界》，17，頁 32。
- f. 孔國平(2012)。〈中國數學史上最光輝的篇章：李冶、秦九韶、楊輝、朱世傑的故事〉(第 1 版)。長春市：吉林科學技術出版社，頁 71-84。
- g. 李元東，任全紅(2015)。〈宋代數學四大家之秦九韶的數學成就考究〉。《蘭臺世界》，頁 54-55。
- h. 萬廣磊(2019)。〈海倫與秦九韶跨越時空的握手〉。《初中生世界》，Z5，頁 95-96。

網上參考資料:

由「大哉言數」網頁提供《數書九章》的網上版:

<http://mathsgreat.com/CMhist/ssjc/ssjc.html>

四大家」⁵⁶。秦九韶自幼聰穎好學，刻苦勤奮，博學多才。1231年他考中進士⁵⁷，先後在不同地方為官。

1244年至1247年⁵⁸，秦九韶在湖州為其母守孝三年期間(直屬親人去世後，居住在家斷絕娛樂及交際，以示哀思)，他刻苦鑽研數學，並把長期累積的數學知識和研究加以整理，寫下曠古燦今之作《數書九章》(可以參看由「大哉言數」網頁提供《數書九章》的網上版<http://mathsgreat.com/CMhist/ssjc/ssjc.html>)。數學史家梁宗巨評價秦九韶的《數書九章》(1247年)⁵⁹是：

“劃時代的鉅著，內容豐富，精湛絕倫。特別是大衍求一術和高次代數方程解法，在世界數學史上佔有崇高的地位。那時13世紀西方漫長的黑夜猶未結束，它卻像旭日一般在東方發出萬丈光芒。”

⁵⁶ 蘇意雯(2006)。〈三斜求積術淺談(海龍公式專輯)〉。《HPM 通訊》，第九卷，第四期，第六版(2006/4)。

⁵⁷ 劉志彬(2010)。〈秦九韶與《數書九章》〉。《蘭臺世界》，17，頁32。

⁵⁸ 吳文俊(1987)。〈秦九韶與《數書九章》〉。北京師範大學出版社，頁2。

⁵⁹ 梁宗巨(1980)。〈世界數學史簡編(第1版)〉。瀋陽：遼寧人民出版社，頁418。

《數書九章》分九類(即九章)十八卷。全書共八十一道有代表性的數學問題，這些問題多與當時人民社會有關，分為九類：大衍、天時、田域、測望、賦役、錢穀、營建、軍旅、市易，每類兩卷九題。這本書實用性極高，所設問題複雜，但提供解題原理和詳細步驟。其中具有世界意義的重要貢獻，如“大衍求一術”(現在所稱的“中國剩餘定理”(Chinese Remainder Theorem))是一次同餘式組的解法、“正負開方術”是數字高次方程式的近似解法⁶⁰及“三斜求積術”是透過已知三角形三邊之長求其面積的計算方法⁶¹。

“三斜求積術”是秦九韶在幾何方面的一項傑出成果，它等價於古希臘著名的“海倫公式”(又譯作“希羅公式”(Heron's formula))。三斜求積為《數書九章》第五卷田域類的第二題⁶²：

問：沙田一段，有三斜，其小斜一十三里，中斜一十四里，大斜一十五里，里法三百，欲知為田幾何？

答曰：田積三百一十五頃。

⁶⁰ 陳方正(1999)。〈試論中國數學發展與皇朝盛衰以及外來影響的關係〉。《中國文化研究所學報》，新第8期(1999年)，頁254。

⁶¹ 蘇意雯(2006)。〈三斜求積術淺談(海龍公式專輯)〉。《HPM通訊》，第九卷，第四期，第六版(2006/4)。

⁶² 秦九韶(1936)。〈數書九章 二〉。商務印書館，頁127。

術曰：以少廣求之。以小斜冪併大斜冪，減中斜冪，餘半之，自乘，于上；以小斜冪乘大斜冪，減上，餘四約之，為實；一為從隅，開平方，得積。

三斜求積用現代語言表述⁶³：

問題：有一塊沙田，有三條邊(斜) (即該塊沙田為三角形)(圖 5)，小邊長 13 里，中邊長 14 里，大邊長 15 里，每三百步為一里，求沙田的面積(即三角形的面積)。

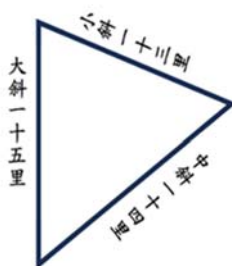


圖 5 三角形沙田

答案：沙田的面積是 315 頃。

⁶³ 參考資料：

- 蘇意雯(2006)。〈三斜求積術淺談(海龍公式專輯)〉。《HPM 通訊》，第九卷，第四期，第六-七版 (2006/4)。
- 李開周(2020)。〈誰說不能從武俠學數學?〉出版社：時報出版，頁 146 - 148。

方法：用“少廣”術來求（“少廣”是《九章算術》中的第四章）。以小邊的平方加上大邊的平方，減去中邊的平方，所得之值除以 2 後再平方，之後以小邊的平方乘以大邊的平方減去前面的數值，所得之值除以 4 再開平方，其結果就是所求沙田的面積。

總括來說，上述的“三斜求積術”，給出了已知三角形三邊之長求其面積的公式。用現代數學符號表示，秦九韶的三斜求積公式如下：

若三角形的三邊長度為 a , b 和 c ，則

$$\text{三角形的面積} = \sqrt{\frac{1}{4} \left[a^2 c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} \right)^2 \right]}。$$

依照此公式，代入 $a=13$, $b=14$, $c=15$ ，我們可以得到

$$\text{沙田的面積} = \sqrt{\frac{1}{4} \left[13^2 \times 15^2 - \left(\frac{13^2 + 15^2 - 14^2}{2} \right)^2 \right]} = 84 \text{ 平方里。}$$

因為中國古代會用「頃」作田地面積單位，故需要再進行換算。因每 300 步為 1 里，所以 90000 (300×300) 「平方步」為 1 平方里，並且 240 「平方步」為 1 畝，100 畝為 1 頃。因此，

$$\begin{aligned}
 \text{沙田的面積} &= 84 \text{ 平方里} \\
 &= 84 \times 90000 \text{ 平方步} \\
 &= \frac{84 \times 90000}{240} \text{ 畝} \\
 &= \frac{84 \times 90000}{240 \times 100} \text{ 頃} \\
 &= 315 \text{ 頃}
 \end{aligned}$$

經過以上的運算，最後得到沙田的面積是 315 頃。

此外，為何“三斜求積術”與“海倫公式”是等價的。首先從秦九韶的三斜求積公式開始，運用因式分解，來推演“海倫公式”(Heron's formula)⁶⁴：

$$\begin{aligned}
 \text{三角形的面積} &= \sqrt{\frac{1}{4} \left[a^2 c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} \right)^2 \right]} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{16} (4a^2 c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2)}
 \end{aligned}$$

⁶⁴ 參考資料：

- a. 蘇意雯(2006)。〈三斜求積術淺談(海龍公式專輯)〉。《HPM 通訊》，第九卷，第四期，第八版 (2006/4)。
- b. 梁子傑(1996)。秦九韶與「三斜求積術」。Mathematical Excalibur, Vol. 2, No. 2, Mar-Apr, 96，頁 4。

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{1}{16}((2ac)^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2)} \\
&= \sqrt{\frac{1}{16}(2ac + a^2 + c^2 - b^2)(2ac - a^2 - c^2 + b^2)} \\
&= \sqrt{\frac{1}{16}((a+c)^2 - b^2)(b^2 - (a-c)^2)} \\
&= \sqrt{\frac{1}{16}(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)} \\
&= \sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b+c}{2} - a\right)\left(\frac{a+b+c}{2} - b\right)\left(\frac{a+b+c}{2} - c\right)}
\end{aligned}$$

最後設 $s = \frac{a+b+c}{2}$ 代入上述公式。於是，

三角形的面積 = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ，這就是“海倫公式”了。

學習活動 (三)：尋找“三斜求積術”與“海倫公式”的秘密（利用等邊、等腰及直角三角形）

教師先與學生重溫計算三角形面積的公式（底乘高除以二）。然後教師介紹秦九韶的生平事蹟。接著提及秦九韶的“三斜求積術”是具有世界意義的重要貢獻，它是透過已知三角形三邊之長求其面積的公式。這個公式與古希臘著名的“海倫公式”

雖然有形式上的不同，但兩個公式是等價的。然後，教師讓學生在其能力範圍內，去驗證這兩個公式。

教師於是派發透明方格紙（每一格的邊長為 1 厘米）及白紙（或使用電子軟件 Polypad 幾何軟件（網頁：<https://polypad.amplify.com/p>）），學生利用白紙畫出不同邊長的等邊、等腰及直角三角形^(註 1)，並透過圖形分割及拼合、利用三角形公式（底乘高除以二）計算或運用方格紙數算等方式求三角形面積。之後，利用平板內置的科學計算機及運用秦九韶的“三斜求積術”^(註 2)和“海倫公式”^(註 3)計算，比對結果，去驗證這兩個公式。儘管以數學證明所要求嚴謹來看，這證明是不夠標準，但對於小學至初中生而言，卻提供給他們「奇妙數學之求三角形面積的方法」的一個例子。

教師可按學生能力和興趣加入以上增潤課題，從而透過這個學習活動進一步豐富學生對計算三角形面積的方法。除此之外，還會透過自主探索，讓學生從多方面進行思考。從探索過程中獲取知識，激活學生學習新知的興趣。最後，秦九韶的傑出數學成就，能深化學生對中國古代數學的輝煌成就的認識，進而對中華文化的重視，成為了自己的使命。

示範例子：利用一個等腰三角形，驗證“三斜求積術”與“海倫公式”。

首先利用電子軟件 Polypad 製作一個等腰三角形。選取 custom 後，將圖形變成一個等腰三角形(5,5,6)。接著透過調整大小並進行分割及拼合，將等腰三角形分割成 2 個同等的直角三角形(3,4,5)，每一個直角三角形的面積為 6 cm^2 (利用三角形公式(底乘高除以二)計算)。因此，求得等腰三角形 (5,5,6) 的面積為 12 cm^2 。(見圖 6)

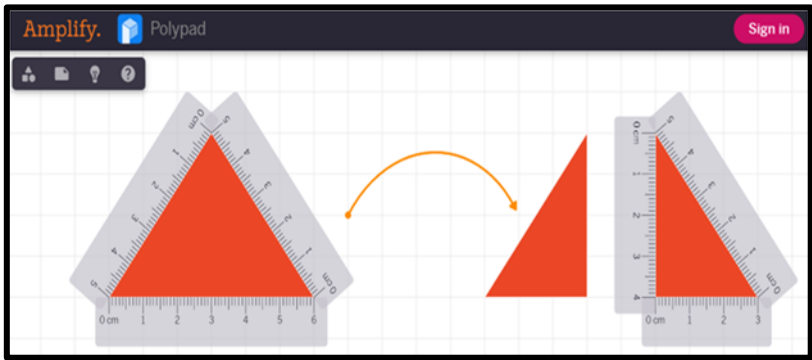


圖 6 利用 Polypad 製作一個等腰三角形及求其面積

透過方格紙或電子軟件 polypad，學生能增潤對三角形面積計算的方法。然後，利用平板內置的科學計算機及運用秦九韶的“三斜求積術”和“海倫公式”計算，比對結果，去驗證這兩個公式。

運用「三斜求積術」(註²)：代入 $a = 5, b = 5, c = 6$

$$\begin{aligned} \text{等腰三角形}(5,5,6)\text{的面積} &= \sqrt{\frac{1}{4} \left[5^2 6^2 - \left(\frac{5^2 + 6^2 - 5^2}{2} \right)^2 \right]} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4} [900 - 324]} = 12 \end{aligned}$$

運用「海倫公式」(註³)：代入 $a = 5, b = 5, c = 6$

$$s = \frac{5 + 5 + 6}{2} = 8$$

$$\text{等腰三角形}(5,5,6)\text{的面積} = \sqrt{8(8-5)(8-5)(8-6)} = 12$$

註：

1. 此教學活動避免畫出任意三角形，因任意三角形的圖形分割及拼合較為複雜。亦可提供邊長為 3、4、5 及 5、12、13 厘米直角三角形紙樣予學生。
2. 秦九韶的三斜求積公式：設三角形的三邊長度為 a, b 和 c ，則三角形的面積 $= \sqrt{\frac{1}{4} \left[a^2 c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} \right)^2 \right]}$ 。
3. 海倫公式：設三角形的三邊長度為 a, b 和 c ，則三角形的面積 $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ， $s = \frac{a+b+c}{2}$ 。

結論：

《觀今宜鑒古，無古不成今》（增廣賢文）喻以歷史為借鏡，掌握現今萬事的規律，從而開創未來。新知識的創造，往往建基於現今的知識點，並從中找到規律並新論述及思考方式。本文作者在教學活動上適切加入數學史，並有機結合電子學習，不單能加強學生對課題的理解，也能培養學生的價值觀及態度，更能讓學生體驗知識的創造與演變。在今瞬息萬變的世代中，寄望學生鑒古知今，掌握時代的洪流。

參考文獻:

- [1] 課程發展議會 (2017)。《數學教育學習領域課程指引 (小一至中六)》。香港：課程發展議會。取自
https://www.edb.gov.hk/attachment/tc/curriculum-development/kla/ma/curr/ME_KLACG_chi_2017_12_08.pdf
- [2] 李志堅、姚泳楹、司徒寶美(2023)。〈數學史與數學教育〉。《數學教育》(EduMath)，第 46 期(9/2023)，頁 2-22。
- [3] 中央人民政府駐香港特別行政區聯絡辦公室-中國歷史紀年簡表。取自
http://big5.locpg.gov.cn/zggq/2014-01/04/c_125956418.htm
- [4] 百度百科 - 中國古代數學 (中國古代科學中一門重要學科)。取自
<https://baike.baidu.hk/item/%E4%B8%AD%E5%9C%8B%E5%8F%A4%E4%BB%A3%E6%95%B8%E5%AD%B8/4124209>
- [5] 中文百科全書 - 中國古代數學。取自
<https://www.newton.com.tw/wiki/%E4%B8%AD%E5%9C%8B%E5%8F%A4%E4%BB%A3%E6%95%B8%E5%AD%B8/4124209>

[6] 中國數學〔Chinese Mathematics〕。取自

<http://www2.mcsh.kh.edu.tw/teaches/math/%E4%B8%AD%E5%9C%8B%E6%95%B8%E5%AD%B8%EF%B9%9DChinese%20Mathematics%EF%B9%9E.htm>

作者電郵：

李志堅 ck.lee.isaiah@gmail.com

姚泳楹 wingying512@gmail.com

司徒寶美 szetopomee@gmail.com