 示例：

畢氏定理在中國古代的證明方法

目 標：(1) 認識畢氏定理在中國古代的發展

1. 欣賞中國在數學知識發展上的貢獻

學習階段：3

學習單位：畢氏定理

所需教材：(1)由相關書籍發展而成的工作紙

(2) 有關劉徽證明的活動材料

預備知識：對畢氏定理有基礎認識

活動內容：

1. 教師要求學生說出畢氏定理的內容。

2. 教師派發工作紙1，並要求學生：

1. 從中盡量找出畢氏定理的不同名稱；
2. 找出有關畢氏定理證明的數目。

3. 教師總結所找到的名稱：勾股定理及商高定理。教師可略為解釋有關勾股定理名稱的起源，並邀請學生就畢氏定理應否改稱為勾股定理的名字作辯論。第3題內(a)至(c)部可作為學生家課。

4. 教師分發附件及工作紙2給學生，教師略為解釋趙爽證明該定理的方法(參閱附件或教師注意事項內其他相關證明方法)。教師引導學生觀察以上證明的精妙之處，然後著學生完成有關證明。最後，教師總結證明的步驟

5. 教師介紹我國古代另一數學家劉徽及其背景故事[[1]](#footnote-1)。學生獲派發如下舖排的物料，教師要求學生以最少步驟移動這5塊塊件來組成一個以邊長為*c*的大正方形。

*a*

*b*





*b*

*a*

*c*

*b*

1. 教師邀請部分學生展示他們的步驟，並與同學討論最少步驟的方法。教師分發工作紙3，並介紹劉徽所採用的「出入相補法」及以上的「青朱出入圖」。
2. 教師總結在中國古代數學家所使用的兩種證明方法，並可比較其他國家如前美國總統伽菲爾德的證明方法。從而引導學生欣賞中國在發展數學知識上的貢獻。教師可派發工作紙4給對這課題甚感興趣的學生，讓他們探究勾股定理在中國古代的應用情況。

**工作紙1**：畢氏定理的名稱

閱讀以下段落並回答以下問題。

幾何學裏有一個非常重要的定理─畢達哥拉斯定理(或簡稱畢氏定理)。畢達哥拉斯是約於公元前500年的希臘哲學家、天文學家、數學家和音樂家。雖然這定理稱為畢氏定理，但是仍然有討論指出有比畢達哥拉斯更早的數學家已發現這定理。在我國，這個定理稱為勾股定理，或在台灣省稱為商高定理。勾、股是指直角三角形內較短的兩邊（弦是指三角形內的鈄邊），而商高則是約於公元前1100年周朝時代的人物。這兩個名字均出現於我國有名的《周髀算經》內。

在中國流傳至今最古老的一部天算典籍《周髀算經》中，第一章便記述周公與商高 [[2]](#footnote-2)1的問答，由於商高的答辭中論述了勾股定理的特例「句[[3]](#footnote-3)2廣三，股修四，徑隅五」的內容。除此，在《周髀算經》卷內之二記載榮方與陳子問答中，亦有陳子講述：「句股各自乘，并而開方得之」。用現代數學符號表示，即是*a*2 + *b*2 = *c*2，其中*a*、*b*及*c* 分別是直三角形的兩邊而*c* 是鈄邊。可見在當時已知句股定理。

雖然《周髀算經》的成書年代估計為在公元前一世紀至公元一世紀[[4]](#footnote-4)3，不過書中內容則可能在成書前便已產生，如公元前十一世紀[[5]](#footnote-5)4。因此歷來便有討論，「勾股定理」在中國何時已有嚴格的證明及應否將畢氏定理正名為勾股定理。

勾股定理不僅是最古老的數學定理之一，也是數學中證法最多的一個定理，幾千年來，人們已經發現了400多種不同的證明方法，足以編成厚厚的一本書。

1. (a) 盡量寫出相等於畢氏定理的名稱。

(b) 有多少個已知證明畢氏定理的方法？

2. 在圖中於對應位置寫出三角形內的“勾”、“股”、“弦”的名稱。

3. (a) 在希臘，畢氏定理大約於那年被「發現」出來呢？

1. 《周髀算經》大約於那年出現？為何不能準確說出勾股定理的出現年份？

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |
|  |

(c) 簡單解釋為何有言論指畢氏定理應稱為勾股定理。

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |

工作紙**2**：趙爽的證明方法

參照附件文章所提趙爽(約於公元300年)在為《周髀算經》內勾股定理作注釋，所用的證明方法，在以下方空格內將該證明以數學語言重新改寫。



題解：

工作紙**3**：劉徽的證明

|  |  |
| --- | --- |
| D:\CDI\Revised Mathematics Curricula\L&T Packages\Measure Shape & Space\Liu Hui.jpg | 與趙爽同期，中國的另一數學家劉徽亦發現了一奇妙證明勾股定理的方法。劉徽的方法是完全不用代數方法來作出證明。他的方法以當時文字記錄如下：  句1自乘為朱方，股自乘為青方，令出入相補，各從其類，因就其餘不移動也。合成弦方之冪，開方除之，即弦也。 |
| 劉徽的方法：  劉徽首先作出三角形上兩條直角邊上的正方形，他把由一條直角邊形成的正方形叫做「朱方」，而另一條直角邊形成的正方形叫做「青方」(見圖一)，然後把圖中標注有「出」的那部分圖形，移到標注有「入」的那些位置，就拼成了圖中斜置的那個正方形(見圖二)。  劉徽把斜置的那個正方形叫做「弦方」，它正好是由直角三角形斜邊形成的一個正方形。  經過這樣一番移、合、拼、補，自然而然地得出了結論：  朱方+青方=弦方  即 *a*2 + *b*2 = *c*2。  「青朱出入圖」是一幅多麼神奇的圖！它甚至不用去標注任何文字，只要相應地塗上朱、青兩種顏色，便能把蘊含於勾股定理中的數學真理，清晰地展示在世人面前。 | |

摘錄自《數學奇觀》第61頁

註1: 「句」為「勾」字的古代用字。

**工作紙4**：蘆葦問題(或在印度稱為蓮花問題)



*a*

圖一

圖二

出3

入1

出2

入2

入3

出1

*c*

**弦**

**朱**

**青**

*b*

1.

|  |
| --- |
| 在《九章算術》的第九章 (勾股章)內的一道出名的蘆葦問題如下：  「葭生中央問題」  今有池方一丈，葭生其中央，出水一尺，引葭赴岸，適與岸齊，問水深葭長各幾何?  轉為現代中文的意思如下：  有一個正方形的池塘，邊長為1丈[[6]](#footnote-6)1，有棵蘆葦生長在池塘的正中央，高出水面的部分有1尺長，如果把蘆葦向岸邊拉，葦頂正好能碰到池岸邊沿。問池塘水深和蘆葦的長度各是多少？ |

(a) 畫出以上題意並解決以上問題。

題解：

(b)

|  |
| --- |
| 書內提供的題解，以近代語文寫成如下：  把池塘邊長的一半自乘，再把蘆葦出水的那部分自乘，然後相減，將所得的差除以出水數的2倍，就是池塘的水深，加上出水數，就是蘆葦的長度。 |

解釋為何以上方法能找到答案。

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |

1. 以下為另一首印度作家婆什迦罹(公元1114-1185)有名的蓮花歌謠，你可否以同樣方法解決問題？

平平湖水清可鑒，面上半尺生紅蓬；  
出泥不染亭亭立，忽被強風吹一邊；  
漁人觀看忙向前，花離原位兩尺遠；  
能算諸君請解題，湖水如何知深淺。[[7]](#footnote-7)2

題解：

教師注意事項：

1. 本示例提供的閱讀材料只供參考，教師可取用其他可供討論及配合教學目標的閱讀材料。教師宜安排學生在堂上閱讀材料，然後進行討論，而不宜只給予學生作家課活動。除此，教師亦可提供其他課餘閱讀材料給學生或要求學生進行專題習作。
2. 部分學生會覺得較難明白一些以古代語文寫成的閱讀材料。教師可只展示該材料，然後讓學生閱讀以近代語文寫成的文章。如果學生對古文有興趣的話，亦可向中文科教師請教或與中文科合作改為一跨學科的活動。
3. 在進行探討數學歷史的活動時，讓學生領會到數學的動態發展是至為重要的。同時，教師須注意不同書籍在記載歷史詳細背景會略有出入。教師須小心處理這方面的問題及選擇較為可信的閱讀材料。再者，亦須留意這活動主要引述中國在勾股定理的發展，亦可提出其他文明如巴比倫在這方面的貢獻。

4. 教師可用旋轉變換的概念來證明趙爽所提供的「弦圖」：

|  |  |
| --- | --- |
|  | 步驟：  1. 由給出的△*ABC*，分別以邊長*c*, *a*及*b*作正方形*ACHK*, *BCLM*和*BFPA*。  2. 將△*ABC*繞*C*點以順時針方向旋轉90°，與△*HLC*重合。  3. 將△*ABC*繞A點以逆時針方向旋轉90°，與△*APK*重合。  4. *KPQ*為直線。延長線段*CL*會與*AP*相交而形成長方形*OLQP*。  5. 由於*OP*=*b–a*=*OL*，因此*OLQP*實為邊長*b–a*的正方形。  6. 由於△*LCH* ≅△*QHK*≅△*PKA* ≅△*OCA*  所以S*ACHK*=4S*LCH*+ S*OLQP*  7. 化簡，可得*c*2=*a*2+*b*2 |

5. 工作紙4的設計是增進學生對中國古代應用勾股定理的問題。有關問題的答案可在《數學奇觀》一書內的第6.6段找到。除此，勾股定理在中國的另一重要應用為求太陽與地球間的距離。這內容可在《中國古代數學簡史》一書內找到。

參考資料：

書籍：

1. 李儼(1992)。《中國古代數學簡史》。中國台灣：九章出版社。
2. 李天華、許濟華編著(1995)。《數學奇觀》。中國台灣：九章出版社。
3. 錢寶琮主編(1981)。《中國數學史》。中國北京：科學出版社。
4. Dan Bennett (1995). *Pythagoras Plugged in Proofs and Problems for the Geometer’s Sketchpad*. USA.C.A: Key Curriculum Press.
5. Roger B. Nelsen. (1993). *Proofs Without Words- Exercises in Visual Thinking*.Washington, USA.DC: The Mathematical Association of America
6. Swetz, F.J. & Kao, T.I. (1977). *Was Pythagoras Chinese?*. USA: The Pennsylvania State of University Press.

文章或論文：

1. 李學數(1978)。“希臘郵票上的數學定理和中國的「商高定理」”《數學和數學家的故事(1)》。頁1-9。香港：廣角鏡出版社。
2. 曲安京(1996)。“商高、趙爽與劉徽關於勾股定理的證明”《數學傳播》20卷3期。台北：中央研究院數學研究所。
3. Darko Veljan (2000). The 2500-Year Old Pythagorean Theorem. In *Mathematics Magazine* Vol. 73, No.4, October 2000. Washington, DC: The Mathematical Association of America.
4. Lit, C.K. (1998). *Using history of mathematics in junior secondary school classroom: A curriculum perspective*. Unpublished thesis. H.K.: The Chinese University of Hong Kong.

**附件**

勾股定理在我國傳統數學(尤其是幾何學)中是一項非常重要的發現及有廣泛應用。其中有明確記載勾股定理的證明，要算是三國時期的數學家趙爽注釋《周髀算經》並撰著「句[[8]](#footnote-8)1股圓方圖注」。趙爽，字君卿，大約是魏晉(公元三至四世紀)時期的人。他在數學方面的工作，主要保存在《周髀算經注》之內，其中最寶貴的是《句股圓方圖注》。《句股圓方圖注》列於現傳本《周髀算經》卷內。它全文不過五百餘字，卻列出有關於直角三角形三邊之間關係的命題共21條。其一為勾股定理及有關勾股定理的證明圖─「弦圖」。

|  |  |
| --- | --- |
| 趙爽的證法很有特色，首先，他作4個同樣大小的直角三角形，將它們拼成右圖的形狀，然後再著手計劃整個圖形的面積。  黃  朱  朱  朱  朱  顯然，整個*ACHK*圖形是一個正方形，它的邊長是*c*，面積為*c*2。另一方面，整個*ACHK*圖形又可以看作是4個標有「朱」的三角形與1個標有「黃」的小正方形面積的和。 |  |

4個三角形的總面積是2*ab*，中間那個小正方形的面積是(*b*-*a*)2，它們的和是2*ab*+(*b*-*a*)2=*a*2+*b*2。比較這兩種方法算出的結果，就有

*a*2 + *b*2 = *c*2。

趙爽的證法鮮明地體現了我國古代證題術的特色，這就是先對圖形進行移、合、拼、補，然後再通過代數運算得出幾何問題的證明，這種方法融合幾何、代數於一體，不僅嚴謹，而且直觀，顯示出與古代西方數學完全不同的風格。

部分材料取材自《數學奇觀》第60頁

1. 劉徽以割圓術方法來估計π 值是十分有名的。他的方法是將圓分割為大邊數的正多邊形，從多邊形周界估計圓周，從而求得π 的估計值。 [↑](#footnote-ref-1)
2. 1 「從《中國方志從書 商南縣志卷八》〈人物志〉中查獲一條有關商高生平的記載：[周] 商高，黃帝之昆孫。以地得姓。周初封子男於商。精數學，[周髀] 衍其說為算經。《國語》曰司商。」曲安京(1996) [↑](#footnote-ref-2)
3. 2 「句」為「勾」的古字。 [↑](#footnote-ref-3)
4. 3 李儼(1992)。《中國古代數學簡史》第32頁。 [↑](#footnote-ref-4)
5. 4 「關於《商南縣志》及上述文字的作者及出處，……，十分可信，商高為西周初期(約公元前十一世紀)的數學家殆無疑問。」曲安京(1996) [↑](#footnote-ref-5)
6. 1 1丈等於10尺。 [↑](#footnote-ref-6)
7. 2 本示例內工作紙大部分詩詞取材自九章出版社的《數學奇觀》及《中國古代數學簡史》，蒙孫文先先生慷慨借出版權，刊於本教學資源套，謹此致謝。 [↑](#footnote-ref-7)
8. 1 「句」為「勾」字的古代用字。 [↑](#footnote-ref-8)